NULLSTELLENBESTIMMUNG IN BANACHRÄUMEN MIT EINBETTUNGSFAMILIEN

Inaugural - Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der
Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Universität Düsseldorf
vorgelegt von

Michael Teusner

aus Ratingen

Düsseldorf 1983

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543926_0025

NULLSTELLENBESTIMMUNG IN BANACHRÄUMEN MIT EINBETTUNGSFAMILIEN

Inaugural - Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der
Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Universität Düsseldorf
vorgelegt von

Michael Teusner

aus Ratingen

Düsseldorf 1983

1. Berichterstatter: Prof. Dr. B. Döring

2. Berichterstatter: Prof. Dr. W. Petry

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Dezember 1983

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

		Seite
I.	Einleitung	1
II.	Problemstellung und zusammenfassende Übersicht	7
III.	Bezeichnungen, Abkürzungen und Schreibweisen	19
IV.	Grundlegende Definitionen und Sätze	23
V.	Existenzaussagen über Lösungen von Einbettungen	36
VI.	Definition der Einbettungsverfahren EV1 und EV2	45
VII.	Ausführbarkeitsaussagen für EV1	53
VIII.	Ausführbarkeitsaussagen für EV2	71
IX.	Gedämpfte Newton-ähnliche Verfahren als spezielle Einbettungsverfahren	113
X.	Ausführbarkeitsaussagen für die Einbettungsverfahren EV3 und EV4	117
XI.	Erläuterung einiger Probleme bei der praktischen Durchführung von Einbettungsverfahren an einem einfachen Beispiel	151
XII.	Beispiele	164
XIII.	Literaturverzeichnis	202

I. EINLEITUNG

Gegeben sei ein Operator F, der eine offene Teilmenge D eines Banachraumes X in einen Banachraum Z abbildet.

Gesucht sei eine Lösung $x^* \in X$ der Gleichung

(1.1) $\quad F(x) = 0 \ .$

Üblicherweise versucht man eine Lösung x^* zunächst durch explizite Auflösung der Gleichung (1.1) zu bestimmen. Ist dies nicht möglich, so wird man in der Regel als nächstes versuchen, x^* ausgehend von einem Startwert x_0 mit Hilfe eines lokal konvergenten Iterationsverfahrens (z.B. sukzessive Approximation oder Newton-Verfahren) und einer zugehörigen Verfahrensfunktion φ als Grenzwert einer Iterationsfolge

(1.2) $\quad x_{i+1} := \varphi(x_i) \quad , \quad i \in \mathbb{N}_0$

zu ermitteln.

Hierzu benötigt man einen Startwert $x_0 \in D$, der möglichst so gewählt sein sollte, daß die hiervon ausgehende durch das jeweilige Iterationsverfahren mit (1.2) erzeugte Folge in D wohldefiniert ist und gegen eine Nullstelle von F konvergiert.

Bei der numerischen Ausführung stellt man normalerweise fest, daß das Konvergenzverhalten von (1.2) wesentlich von der Wahl des Startwertes x_0 abhängt. Damit die Wohldefiniertheit und Konvergenz des Verfahrens gesichert werden kann, ist es im allgemeinen erforderlich, daß der Startwert x_0 in einer geeigneten, vom Operator F und dem gewählten Verfahren abhängigen Umgebung um eine Nullstelle von F (dem "Einzugsbereich" der Nullstelle) liegt. Da aber die gesuchte Nullstelle und damit auch der zugehörige Einzugsbereich für ein angewendetes lokal konvergentes Verfahren gerade nicht bekannt ist, bereitet es oft Schwierigkeiten, geeignete Startwerte für das entsprechende Verfahren zu finden. Dies gilt umso mehr, wenn man bestrebt ist, vor Ausführung des Verfahrens für den Startwert die Voraussetzungen eines Konvergenzsatzes zu verifizieren.

Es besteht daher ein Interesse an Iterationsverfahren, bei denen die Konvergenz gegen eine Lösung von (1.1) für Startwerte aus einem möglichst großen Bereich sichergestellt werden kann. Aus diesem Grunde haben in den vergangenen Jahrzehnten Einbettungsmethoden (auch Stetigkeits- oder Homotopiemethoden genannt) Bedeutung erlangt, denn mit ihrer Hilfe ist es unter gewissen Voraussetzungen möglich, für ein lokal konvergentes Verfahren den Einzugsbereich einer Nullstelle erheblich zu erweitern. Eine Übersicht über die wesentlichen mit der Einbettungsmethode verbundenen Fragestellungen sowie deren Lösungsansätze findet sich z.B. bei ORTEGA - RHEINBOLDT in [42].

Alle Einbettungsverfahren basieren darauf, daß man das Ausgangsproblem (1.1) auf folgende Weise in eine Problemklasse "einbettet":

Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und $J := (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ wird eine Abbildung $H : D \times J \to Z$ gewählt mit

$$\text{(1.3)} \qquad \begin{aligned} &\text{a)} \quad H(x_o, 0) = 0 \\ &\text{b)} \quad \forall\, x \in D : H(x,1) = F(x). \end{aligned}$$

Für den Fall, daß durch H implizit eine stetige Funktion $x : J \to D$ definiert ist mit

$$\text{(1.4)} \qquad \begin{aligned} &\text{a)} \quad x(0) = x_o \\ &\text{b)} \quad \forall\, \lambda \in J : H(x(\lambda), \lambda) = 0 \end{aligned}$$

ist dann wegen (1.3) b) $x^* := x(1)$ eine Lösung von (1.1). Da die Funktion x in diesem Falle den Startwert x_o stetig mit einer Lösung x^* von (1.1) verbindet, kann sie als implizite Führungsgröße verwendet werden, längs derer sich iterativ Näherungen für x^* erzeugen lassen.

Mit Hilfe der auf LAHAYE [34] zurückgehenden "Stufenverfahren" geschieht dies, indem für endlich viele monoton wachsende λ - Werte (Stufen) ein oder mehrere Iterationsschritte mit einem lokal konvergenten Iterationsverfahren ausgeführt werden, um für diese λ - Werte Näherungen für die Lösung von (1.4) b) zu erhalten. Als Startwert wird dabei jeweils die letzte Näherung für die Lösung in der vorhergegangenen Stufe verwendet. Das Ziel bei der Wahl der Stufen und der jeweils dort auszuführenden Iterationsschritte besteht hierbei darin, mit Erreichen von $\lambda = 1$ unter möglichst geringem Aufwand einen Wert

im Einzugsbereich des verwendeten Verfahrens zur Bestimmung einer Nullstelle für F zu erhalten. Entsprechend der Vielzahl möglicher lokal konvergenter Verfahren sowie entsprechend unterschiedlicher Kriterien für die Wahl der jeweiligen "Stufenbreite" (= Abstand zwischen λ_{i+1} und λ_i) und die Anzahl der lokalen Iterationsschritte gibt es eine Reihe von Veröffentlichungen, in denen Einbettungsverfahren, basierend auf der prinzipiellen Idee des Stufenverfahrens unter jeweils verschiedenen Gesichtspunkten behandelt werden. Exemplarisch seien hiervon etwa die Arbeiten von AVILA [4], FEILMEIER - LORY - SCHEURING - WACKER [19], FICKEN [20], FREUDENSTEIN - ROTH [21], LINDFIELD - SIMPSON [36], MEYER [40], und WACKER [52] angeführt.

Falls für die Einbettungsfunktion H aus (1.3) sowie für die Lösungsfunktion x nach (1.4) entsprechende Differenzierbarkeitseigenschaften erfüllt sind und die Fréchet-Ableitung H_x an den erforderlichen Stellen regulär ist, so gewinnt man über Differentiation aus Gleichung (1.4) die sogenannte "Davidenko - Differentialgleichung"

$$(1.5)\quad a)\quad x'(\lambda) = - H_x^{-1}(x(\lambda),\lambda)\, H_\lambda(x(\lambda),\lambda).$$

Fügt man der Differentialgleichung die Anfangsbedingung

$$(1.5)\quad b)\quad x(0) = x_o$$

hinzu und betrachtet eine Lösung $x : J \to D$ des Anfangswertproblems (1.5), so erhält man hierfür durch Integration wiederum

$$\forall\, \lambda \in J:\ H(x(\lambda),\lambda) = c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

Wegen (1.5) b) und (1.3) a) gilt weiter

$$H(x(0),0) = H(x_o,0) = 0,$$

so daß $c = 0$ sein muß. Folglich ist die Lösung des Problems (1.4) unter den genannten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen äquivalent zur Lösung des Anfangswertproblems (1.5), und die Bestimmung von $x^* = x(1)$ kann mit dem auf DAVIDENKO [10] zurückgehenden "Differentialgleichungsverfahren" durch Anwendung bekannter Anfangswertmethoden auf das Problem (1.5) erfolgen. Auch zu dieser Art der Lösung von Gleichung (1.1) gibt es neben [10] eine Vielzahl von weitern Veröffentlichungen, unter anderem von FEILMEIER - LORY - SCHEURING - WACKER [19], KLEINMICHEL [30], MEYER [40] und PETRY [44].

Neben der reinen Form für die beiden grundsätzlich verschiedenen Lösungsverfahren bei Einbettungsmethoden werden zwecks Reduzierung des numerischen Aufwandes in den bereits zitierten ebenso wie in weiteren Arbeiten zum Teil auch gemischte oder abgewandelte Verfahren betrachtet. So kann man zum Beispiel im Stufenverfahren den Startwert für die n+1 - te Stufe aus der Näherungslösung für die n - te Stufe durch exakte oder näherungsweise Integration der Differentialgleichung (1.5) b) über die Stufenbreite ermitteln ("Iterations - Differentialgleichungsverfahren"). Im Gegensatz zur direkten Verwendung der Näherungslösung aus der vorangegangenen Stufe als Startwert für die lokale Iteration wird dabei der Verlauf der Lösungskurve über den Bereich der Stufenbreite im Rahmen der Integrationsgenauigkeit verfolgt, so daß gegebenenfalls größere Stufenbreiten und damit eventuell weniger Rechenschritte möglich sind. Eine weitere Möglichkeit der Vergrößerung der Stufenbreiten besteht in der Anwendung von Extrapolationsformeln zwecks Bestimmung der Startnäherung für die jeweilige Stufe aus den Näherungslösungen der vorangegangenen Stufen (vergl. RHEINBOLDT [45]).

Sowohl bei der Anwendung des Differentialgleichungsverfahrens wie auch bei der Durchführung des Stufenverfahrens unter Verwendung Newton-ähnlicher Iterationsverfahren ist zur Konvergenzsicherung die Regularität der Fréchet-Ableitung H_x zumindest in einem hinreichend engen Schlauch um die Lösungsfunktion erforderlich. Da man die Regularität aber in aller Regel a-priori bei einem gegebenen Problem nicht nachweisen kann, wurden erhebliche Anstrengungen unternommen, um Verfahren zu entwickeln, die geeignet sind, auftretenden Singularitäten von H_x entweder zu überwinden oder zu umgehen. Hierzu gibt es im wesentlichen zwei Ansatzmöglichkeiten.

MEYER schlägt in [40] für den Fall des Auftretens einer Singularität von H_x eine Variation der Homotopie vor. Dabei empfiehlt sich jeweils die Wahl einer regularisierenden Einbettung, d.h. die Wahl einer Einbettung, deren Fréchet-Ableitung zumindest in einer Umgebung der entsprechenden Iterierten regulär ist.

Für Operatoren in endlich-dimensionalen reellen Vektorräumen besteht beim Auftreten von Singularitäten bei der Jacobi-Matrix die Möglichkeit der Anwendung von Pseudoinversen (vergl. z.B. DEUFLHARD [14] und [15]) oder ähnlichen Operatoren, die die Information aus dem regulären

Teil von H_x verwerten und in denen die durch den singulären Teil von H_x fehlende Information durch Hilfskonstruktionen ersetzt wird (vergl. z.B. MENZEL - SCHWETLICK [39]). Bei der numerischen Ausführung besteht hierbei das Problem, daß man die Singularität der Jacobi-Matrix numerisch kaum feststellen kann, ehe ein Programmabbruch durch Exponentenüberlauf eingetreten ist. Die verwendeten Verfahren müssen daher grundsätzlich von vorn herein in jedem Schritt für das Auftreten von Singularitäten so eingerichtet sein, daß reguläre wie singuläre Stellen ohne Unterschied und vorherige Klassifizierung gleich gut durchlaufen werden können.

DEUFLHARD benutzt deshalb im überwiegenden Teil der Iterationsschritte Approximationen für die Pseudoinverse, die von Schritt zu Schritt sukzessive durch Rang-1 - Korrekturen nach BROYDEN [7] verändert werden. Im regulären Fall sind die Pseudoinversen mit den jeweiligen Inversen identisch, so daß dann approximierte Inverse verwendet werden.

Von MENZEL - SCHWETLICK werden zunächst längs geeigneter Tangentenrichtungen Startwerte für lokale Iterationen ermittelt (Prädiktorschritte nach dem Euler-Cauchy-Verfahren). Die Startwerte werden dann durch Korrektorschritte innerhalb einer Hyperebene in Richtung der Lösungskurve verbessert. Das Verfahren von MENZEL - SCHWETLICK ist aber nur erfolgreich, solange die Ableitungsmatrix

$$H'(x,\lambda) = (H_x(x,\lambda):H_\lambda(x,\lambda)) \in L(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)$$

den Rang n besitzt. Das bedeutet, daß der Defekt von H_x höchstens 1 betragen darf.

Unter ähnlichen Voraussetzungen konstruiert KELLER in [29] global konvergente Einbettungsverfahren. Hierbei werden die Lösung x und der Einbettungsparameter λ mittels der Bogenlänge s parametrisiert und das Einbettungsverfahren verfolgt unter Verwendung des Newton-Verfahrens sowie einer Pseudobogenlänge σ die Kurve $(x(s),\lambda(s))$ von $s = 0$ bis zu Lösungen bei $s = s^*$.

Die Probleme mit eventuell während der Iteration auftretenden Singularitäten von H_x kann man gänzlich vermeiden, wenn man der Lösungskurve der Homotopiegleichung (1.4) mit Hilfe von ableitungsfreien Iterationsverfahren folgt. Hierbei ist aber der numerische Aufwand zur Problem-

lösung wegen der verringerten Konvergenzgeschwindigkeit dieser Verfahren oft erheblich größer.

Unter dem Gesichtspunkt möglichst schwacher Ausführbarkeits- und Konvergenzvoraussetzungen sind in Verbindung mit ableitungsfreien Iterationsverfahren bei Einbettungsmethoden die verschiedenen Formen der Fixpunktverfahren von Bedeutung. Neben den auf dem Banachschen Fixpunktsatz fußenden Verfahren wurden in diesem Zusammenhang auch implementierbare Verfahren auf der Basis des Brouwerschen bzw. Schauderschen Fixpunktsatzes entwickelt, die sich topologischer Methoden bedienen. Es sei diesbezüglich z.B. auf die Arbeiten von ALEXANDER - YORKE [3], CHOW - MALLET PARET - YORKE [8], EAVES [18] und KELLOG - LI - YORKE [27] verwiesen, die nur einen kleinen Ausschnitt aus der umfangreichen Literatur zu diesem Problemkreis darstellen.

Außer den allgemein anwendbaren Einbettungsverfahren, die nach der Wahl ihrer Methodik bestimmten Kategorien zugeordnet werden können, gibt es weiterhin spezielle Verfahren, deren Anwendbarkeit nur für eine eng umrissene Problemklasse gegeben ist. Diese problemspezifischen Einbettungsverfahren nutzen die Eigenheiten der entsprechenden Problemklasse aus und bieten daher hierfür in der Regel Vorteile. Die Aufzählung all dieser speziellen Verfahren würde hier zu weit führen. Als Beispiel seien etwa genannt die Verfahren für Gleichungssysteme mit separablen Abbildungen (vergl. KOJIMA [31]), für polynomiale Gleichungssysteme in n Variablen (vergl. GARCIA - ZANGWILL [22]) oder für nichtlineare Randwertprobleme unter Verwendung von Analogrechnern (vergl. WASSERSTROM - KIRSZENBLAT [53]).

II. PROBLEMSTELLUNG UND ZUSAMMENFASSENDE ÜBERSICHT

Die folgenden Kapitel dieser Arbeit befassen sich mit Einbettungsmethoden zur Lösung der Operatorgleichung (1.1) auf der Basis des Stufenverfahrens. In Erweiterung des Einbettungsansatzes (1.3) sollen dabei sogenannte "Einbettungsfamilien" $\tilde{H}$ verwendet werden. Während eine Einbettungsfunktion H nach (1.3) über die Bedingung (1.3) a) einem festen Startwert $x_o \in D$ zugeordnet werden kann, besteht eine Einbettungsfamilie $\tilde{H}$ aus einer ganzen Schar von Einbettungsfunktionen, die so gewählt wird, daß jedem $y \in D$ genau eine Einbettung mit y als Startwert zugeordnet ist. Der Startwert y wird somit bei Einbettungsfamilien als Parameter verwendet, so daß gilt $\tilde{H} : D \times D \times J \to Z$ mit

$$(2.1)\quad \begin{array}{ll} a) & \forall\, y \in D : \tilde{H}(y,y,0) = 0 \\ b) & \forall\, x,y \in D : \tilde{H}(x,y,1) = F(x). \end{array}$$

Betrachtet man eine Einbettungsfamilie nur für einen festen Startwert $x_o \in D$, so entsteht über die Zuordnung

$$(2.2)\quad \forall\, (x,\lambda) \in D \times J : \quad H(x,\lambda) := \tilde{H}(x,x_o,\lambda)$$

wiederum eine Einbettungsfunktion H mit den Eigenschaften (1.3). Da dies für jeden Wert $x_o \in D$ gilt, ist es durch die Verwendung von Einbettungsfamilien möglich, im Verlauf eines Iterationsverfahrens bei jeder beliebigen Iterierten von einer zu einer anderen Einbettungsfunktion der Familie zu wechseln. Für den Fall, daß jede Einbettungsfunktion der Familie auch eine stetige Lösung besitzt, bedeutet dies, daß man nicht gezwungen ist, den Verlauf einer festen Lösungsfunktion vom Startwert bis zur Nullstelle x* von F zu verfolgen. Man kann vielmehr von jeder berechneten Näherung x_i aus zu einer neuen stetigen Kurve übergehen, die als Lösungsfunktion der zum Startwert x_i gehörenden Einbettung aus der Familie jeweils x_i mit x* stetig verbindet.

Bei SCHWETLICK [49] und ebenso bei KUBIČEK - HLAVAČEK [33] werden Einbettungsfamilien zur Definition von "Einbettungszyklen" verwendet. Hierbei wird jeweils die zu einem Startwert gehörende Lösungskurve von $\lambda = 0$ bis nach $\lambda = 1$ approximativ verfolgt, und erst bei Erreichen der Näherung für $\lambda = 1$ findet ein Wechsel zu einer neuen bei dieser Näherung startenden Einbettung statt, falls die geforderte Approximationsgüte noch nicht erreicht ist.

Wenn man sich vorstellt, daß sich die mittels einer festen Einbettungs-

funktion H aus einer Einbettungsfamilie $\tilde{H}$ erzeugten Iterierten x_i in gewisser Weise "monoton" in Richtung von x^* bewegen, d.h. wenn

$$\|x_{i+1} - x^*\| \leq \|x_i - x^*\|,$$

so liegt die Überlegung nahe, nach jedem Iterationsschritt eine neue Einbettung H_i aus $\tilde{H}$ zu betrachten, deren Startwert die jeweils letzte Iterierte x_i ist. Man kann so hoffen, durch die Lösung zur jeweils neuen Einbettungsfunktion eine "direktere" Verbindung zu x^* zu erhalten als durch die vorangegangene. Insbesondere lokale Iterationsschritte innerhalb einer Stufe zur besseren Approximation der Lösung $x(\lambda_i)$ einer festen Einbettung scheinen unter diesem Gesichtspunkt nicht sinnvoll, da letztlich nur am Endwert x^* der Kurven, nicht aber an Informationen über deren genauem Verlauf Interesse besteht. Jeder Iterationsschritt sollte so gewählt sein, daß er möglichst große Fortschritte "in Richtung" von x^* bringt.

Ausgehend von einer beliebigen Einbettungsfunktion H erhält man durch den Ansatz $\tilde{H} : D \times D \times J \to Z$ vermöge

$$(2.3) \quad \forall\, (x,y,\lambda) \in D \times D \times J : \quad \tilde{H}(x,y,\lambda) := H(x,\lambda) - (1-\lambda)H(y,\lambda)$$

stets eine zugehörige Einbettungsfamilie. Auf der Basis solcher Einbettungsfamilien werden in dieser Arbeit Stufenverfahren formuliert. Dabei sind für wachsende λ - Werte jeweils gedämpfte Newton-ähnliche Iterationsschritte auszuführen. Durch diese Iterationsschritte soll ausgehend von x_i und λ_i ($i \in \mathbb{N}_o$) mit einer neu berechneten Näherung x_{i+1} stets diejenige Lösungskurve an der betreffenden Stelle λ_{i+1} approximiert werden, die zu der Einbettung aus $\tilde{H}$ mit x_i als Startwert gehört. Auf diese Weise ergibt sich formal die folgende Iterationsvorschrift:

$$(2.4) \quad x_{i+1} := x_i - \omega_i \Gamma_i \tilde{H}(x_i,x_i,\lambda_{i+1})$$
$$\text{mit } i \in \mathbb{N}_o,\ x_i \in D,\ \lambda_{i+1} \in [0,1],\ \omega_i \in \mathbb{R}_+$$
$$\text{und einer Näherung } \Gamma_i \text{ für } \tilde{H}_x^{-1}(x_i,x_i,\lambda_{i+1}).$$

Für die Durchführung eines Iterationsverfahrens gemäß dieser Vorschrift ist es zumindest erforderlich, daß die in Betracht kommenden Einbettungsfunktionen aus der Familie $\tilde{H}$ jeweils eine stetige Lösung besitzen. Falls dies der Fall ist, so sind Kriterien für die Wahl der Einbettungsparameter λ_{i+1}, der Dämpfungsparameter ω_i und der Operatoren Γ_i anzugeben. Da der Grund für die Anwendung von Einbettungsverfahren in der Regel in der mangelnden Information über den globalen Verlauf der Funktion

F aus (1.1) besteht, werden normalerweise globale Informationen über die durch eine Einbettungsfunktion H beziehungsweise eine Einbettungsfamilie $\tilde{H}$ erweiterte Problemklasse, die gemäß (1.3) b) bzw. (2.1) b) für $\lambda = 1$ jeweils die Funktion F umfaßt, noch weniger vorhanden sein. Deshalb sollen für die Erstellung und Durchführung von Iterationsverfahren unter Verwendung von Einbettungsfamilien ausschließlich lokale Informationen verwendet werden. Die Konvergenz dieser Verfahren kann dann selbstverständlich nur unter global geltenden Voraussetzungen abgesichert werden. Es stellen sich daher in diesem Zusammenhang die folgenden Probleme:

A) Angabe von (globalen) Voraussetzungen, unter denen für eine nach (1.3) gebildete Einbettungsfunktion H eine stetige Lösungsfunktion x mit (1.4) existiert (Existenzsätze). Für die Anwendung von Einbettungsfamilien sind die entsprechenden Voraussetzungen dann für jedes verwendete Element der Familie zu fordern.

B) Erstellung von Iterationsverfahren auf der Basis der Vorschrift (2.4) unter ausschließlicher Verwendung lokaler Größen einer Einbettungsfamilie $\tilde{H}$ (Einbettungsverfahren).

C) Angabe von (globalen) Voraussetzungen, unter denen die nach B) gebildeten Verfahren wohldefiniert sind und gegen eine Lösung der Ausgangsgleichung (1.1) konvergieren (Ausführbarkeitssätze).

Die Frage der Existenz von stetigen Lösungen für Einbettungsfunktionen wird in Kapitel V behandelt. Zuvor werden in Kapitel III die in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen und Schreibweisen zusammengestellt, und in Kapitel IV werden die benötigten Definitionen sowie einige für spätere Beweisführungen erforderliche Sätze aus der Literatur angegeben.

Die Wahl der für die Einbettungsverfahren nach B) erforderlichen Verfahrensparameter wird unter dem Gesichtspunkt der Normreduktion für die betreffende Einbettungsfamilie getroffen. Daher lassen sich die Iterationsschritte so steuern, daß alle Iterierten, ebenso wie die dazwischenliegenden Verbindungsstrecken und die zu approximierenden Lösungsfunktionen mit dem Startwert in einer gemeinsamen "Niveaumenge" liegen.

Dabei bezeichnen die "Niveaumengen" zusammenhängende Teilgebiete des Definitionsbereiches, in denen die Norm für die Einbettungsfunktion unterhalb einer festen Schranke c (Niveau) liegt. Sie sind mit Festlegung einer Schranke c den noch zu definierenden Einbettungsverfahren in natürlicher Weise zugeordnet und es ist naheliegend, die Voraussetzungen für Existenz- oder Ausführbarkeitssätze mit entsprechenden Niveaumengen zu verknüpfen. Wie in Satz V.1 bzw. Korollar V.3 gezeigt wird, ist es zum Nachweis der Existenz einer stetig differenzierbaren Lösung x zu einer Einbettung H ausreichend, wenn die Voraussetzungen auf einer zugehörigen Niveaumenge mit beliebigem nichtnegativem Niveau c erfüllt sind. Es ist dabei für die Existenz hinreichend, wenn

- die Niveaumenge abgeschlossen ist,
- die Einbettung H auf der Niveaumenge regulär ist und
- die Frechét-Ableitung H_λ auf der Niveaumenge beschränkt ist.

Durch die in Satz V.1 angegebenen Existenzvoraussetzungen, die für Einbettungen in beliebigen Banachräumen gültig sind, werden einige vergleichbare Aussagen aus der Literatur erweitert bzw. verbessert. So ist z.B. der Existenzsatz 2.2 von SCHWETLICK aus [48] in Satz V.1 als Spezialfall enthalten und die Existenzvoraussetzungen bei Satz 2.2.1 von FEILMEIER - LORY - SCHEURING - WACKER aus [19] werden durch Satz V.1 erheblich abgeschwächt. In Bezug auf die später zu formulierenden Ausführbarkeitssätze sowie auf die Umstände, bei denen Einbettungsverfahren normalerweise eingesetzt werden, ist es wichtig, daß die Voraussetzungen von Satz V.1 im Gegensatz etwa zu den im Vergleich genannten Sätzen der Literatur nicht nur für Einbettungen anwendbar sind, die auf dem ganzen zugrundeliegenden Banachraum definiert und dort auch regulär sind. Aus der Regularität einer Einbettung H auf dem ganzen Banachraum folgt nämlich die Existenz einer koniaren Inversen für F'(x) auf dem ganzen Raum, so daß normalerweise keine Notwendigkeit für die Anwendung eines Einbettungsverfahrens besteht. Da dann keine Singularitäten von F'(x) existieren, ist nämlich die direkte Anwendung entsprechender Verfahren auf die Funktion F selbst im allgemeinen problemlos und erfolgversprechend. Die Anwendung von Einbettungsverfahren erfolgt in der Regel erst dann, wenn solche direkte Verfahren für F versagen, und das ist meist dann der Fall, wenn die Funktion F' an bestimmten Stellen des Definitionsbereiches singulär ist. Satz V.1 ist gerade für solche Fälle auch anwendbar, und er beschreibt dabei die theoretischen

Voraussetzungen für die Existenz einer Lösung. Allerdings erfordert eine Verifikation dieser Voraussetzungen im konkreten Anwendungsfall Informationen über die verwendete Einbettungsfunktion H und damit implizit auch über F, die oft nicht zu bekommen sind. Daher ist der Satz zwar sehr nützlich zur theoretischen Kennzeichnung geeigneter Einbettungsfunktionen, jedoch nur bedingt geeignet für eine a-priori Anwendung in der Praxis. Dieser Sachverhalt trifft naturgemäß auf die Verifikation der meisten theoretischen Aussagen über Einbettungsverfahren zu, weil dazu Kenntnisse über die Einbettung H auf einer entweder weit gefaßten oder aber real schlecht zu präzisierenden Teilmenge des Definitionsbereiches erforderlich sind, die in aller Regel fehlen. Dennoch ist es mit Hilfe des Vergleichs theoretischer Aussagen möglich, die Güte verschiedener Einbettungsfunktionen bzw. Einbettungsverfahren zu beurteilen und die Erfolgsaussichten bei deren Anwendung abzuschätzen.

Bei der Konstruktion von Einbettungsverfahren besteht die Grundzielsetzung in erster Linie darin, ein Verfahren zu erhalten, das die gesuchte Lösung einerseits mit möglichst minimalem numerischen Aufwand und andererseits unter möglichst schwachen Voraussetzungen liefert. Leider ist es nicht möglich, beiden Intentionen gleichzeitig gerecht zu werden. Bei schwächeren Voraussetzungen ist zur Problemlösung ein höherer numerischer Aufwand erforderlich, als wenn stärkere Voraussetzungen erfüllt sind. Daher ist man gezwungen Prioritäten zu setzen. In Kapitel VI wird dieser Tatsache dadurch Rechnung getragen, daß basierend auf der Verfahrensvorschrift (2.4) zwei Verfahren mit unterschiedlich starken Konvergenzvoraussetzungen vorgestellt werden. Durch die Verwendung von Einbettungsfamilien der Art (2.3) ist es dabei möglich, alle für die Durchführung und Konvergenz der Verfahren erforderlichen Eigenschaften von $\tilde{H}$ auf entsprechende für die zugrundeliegende Einbettungsfunktion H zurückzuführen.

Beim Einbettungsverfahren EV1 werden in jedem Schritt nacheinander die Verfahrensparameter λ_{i+1} und ω_i sowie Γ_i unter unterschiedlichen und voneinander unabhängigen Gesichtspunkten festgelegt. Ausgehend von x_i und λ_i ($i \in \mathbb{N}_o$) wird zuerst $\lambda_{i+1} \in (0,1]$ möglichst groß so gewählt, daß die gesamte Verbindungsstrecke zwischen (x_i,λ_i) und (x_i,λ_{i+1}) in einer für das Verfahren festgelegten Niveaumenge bleibt. Dann wird innerhalb einer vorgegebenen Approximationsgüte eine Näherung Γ_i für

die Inverse $\tilde{H}_x^{-1}(x_i,x_i,\lambda_{i+1})$ ermittelt und ein Newton-ähnliches Korrekturglied $\Gamma_i\tilde{H}(x_i,x_i,\lambda_{i+1})$ berechnet. Schließlich ist noch der Dämpfungsfaktor festzulegen. Dieser wird so gewählt, daß längs der Strecke von (x_i,λ_{i+1}) zu (x_{i+1},λ_{i+1}) eine Normreduktion für $\tilde{H}$ und auch für H gesichert ist. Dadurch entsteht wiederum Spielraum zur Erhöhung von λ_{i+1} im nächsten Schritt.

Das Verfahren EV1 ist dadurch charakterisiert, daß das Korrekturglied in jedem Schritt nur einmal ermittelt werden muß und der numerische Aufwand zur Bestimmung der übrigen Parameter relativ gering ist. Gleichzeitig ist die Zahl der Gesamtschritte bis zur Problemlösung bei Gültigkeit entsprechender Voraussetzungen im allgemeinen dank großer Schrittweiten recht günstig.

Zum Zweck der Abschwächung der für die Ausführbarkeit des Einbettungsverfahrens EV1 hinreichenden theoretischen Voraussetzungen ist die Wahl der Verfahrensparameter abzuändern. Dies geschieht in dem ebenfalls in Kapitel VI angeführten Einbettungsverfahren EV2. Dabei muß einerseits zur Lösung der geänderten Bestimmungsgleichungen und andererseits wegen einer möglichen größeren Zahl an Gesamtschritten ein erhöhter numerischer Aufwand in Kauf genommen werden. Im Verfahren EV2 wird der Parameter ω_i aus (2.4) stets mit $1/\lambda_{i+1}$ besetzt. Außerdem wird in EV2 die Inverse $\tilde{H}_x^{-1}(x_i,x_i,\lambda_{i+1})$ nicht durch eine Approximation Γ_i ersetzt. Berücksichtigt man ferner, daß für Einbettungsfamilien der Form (2.3) stets

$$\tilde{H}_x^{-1}(x_i,x_i,\lambda_{i+1})\ \tilde{H}(x_i,x_i,\lambda_{i+1}) = \lambda_{i+1}\ H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})\ H(x_i,\lambda_{i+1}),$$

so stellt man fest, daß nach der Vorschrift (2.4) dann ungedämpfte Newton-Schritte für H bei λ_{i+1} ausgeführt werden. Das bedeutet, daß somit die für jeden Schritt gewünschte Normreduktion für $\tilde{H}$ bzw. H ausschließlich durch die Wahl von λ_{i+1} gesichert werden muß. Ausgehend von (x_i,λ_i) wird daher in EV2 der Wert λ_{i+1} so festgelegt, daß einerseits sichergestellt ist, daß das Verfahren in einer festgelegten Niveaumenge verbleibt und andererseits lokal die Voraussetzungen zur Konvergenz des Newton-Verfahrens bei λ_{i+1} erfüllt sind. Hierbei sind zur Bestimmung von λ_{i+1} eventuell stark nichtlineare Bestimmungsungleichungen zu lösen, die λ_{i+1} in impliziter Form enthalten. Bei der iterativen Lösung dieser Ungleichungen läßt es sich im allgemeinen nicht vermeiden, für jeden iterierten λ - Wert das Korrekturglied

$H_x^{-1}(x_i,\lambda)\, H(x_i,\lambda)$ und damit insbesondere die Inverse $H_x^{-1}(x_i,\lambda)$ neu zu berechnen. Durch den somit erhöhten Aufwand in EV2 ist es möglich, eventuelle Singularitäten von $\bar{H}_x$ bzw. H_x in der zugrundeliegenden Niveaumenge zu umgehen, solange diese nicht direkt auf der Lösung der Einbettung H liegen.

Wie in einem Ausführbarkeitssatz für EV1 in Kapitel VII festgestellt wird, müssen dagegen zum Nachweis der Wohldefiniertheit und der Konvergenz von EV1 Singularitäten von H_x in der zum Verfahren gehörigen Niveaumenge durch eine Regularitätsforderung ausgeschlossen werden. Bezüglich der durch ein Niveau c festgelegten Niveaumenge ist nämlich gemäß Satz VII.5 die Gültigkeit der folgenden Eigenschaften hinreichend für die Ausführbarkeit von EV1:

- Abgeschlossenheit der Niveaumenge
- Regularität von H auf der Niveaumenge
- Beschränktheit von H_λ auf der Niveaumenge
- Gültigkeit einer Lipschitzbedingung für H_x auf der Niveaumenge.

Durch die drei ersten Eigenschaften wird dabei nach Satz V.1 gleichzeitig die Existenz einer stetigen Lösung in der Niveaumenge gesichert.

Das Verfahren EV1 ist vergleichbar zu einem von FEILMEIER - LORY - SCHEURING - WACKER in [19] angegebenen Verfahren, bei dem stufenweise das Newton-Verfahren als lokales Iterationsverfahren verwendet wird. Während bei EV1 bedingt durch die Anwendung von Einbettungsfamilien mit jedem Iterationsschritt eine Erhöhung des Einbettungsparameters vorgenommen werden kann, muß bei diesem Verfahren die jeweils zur entsprechenden Stufe gehörende lokale Lösung bis zu einer hohen Genauigkeit approximiert werden. Das resultiert aus einer andersartigen Definition für die Ausführbarkeit des Stufenverfahrens, bei der jeweils statt einer Näherung die Lösung aus der vorangegangenen Stufe als Startwert für die neue Stufe herangezogen wird. Darüber hinaus werden in dem Verfahren von FEILMEIER - LORY - SCHEURING - WACKER globale, auf den ganzen Raum bezogene Konstanten verwendet. Diese sind einerseits schwer zu ermitteln und ergeben andererseits im Gegensatz zur Verwendung lokaler Konstanten kleinere Schrittweiten. Als logische Folge der Verwendung globaler Konstanten ist auch die Ausführbarkeit des Verfahrens an Voraussetzungen geknüpft, die auf dem ganzen Banachraum gelten müssen. Im Vergleich bietet daher EV1 gleichzeitig den

Vorteil der verallgemeinerten Anwendbarkeit (für Operatoren auf Teilmengen von Banachräumen) wie auch den einer Abschwächung der theoretischen Ausführbarkeitsvoraussetzungen. Verbunden mit der ausschließlichen Verwendung lokaler Information zur Verfahrenssteuerung ist dabei eine Reduzierung des numerischen Aufwandes zur Problemlösung.

Bei geringfügiger Modifikation der Lipschitzbedingung für H_x ist das Einbettungsverfahren EV2 unter nahezu den gleichen Ausführbarkeitsvoraussetzungen ausführbar wie EV1. Dies wird in Kapitel VIII nach der Bereitstellung einiger Hilfsaussagen mit Satz VIII.6 nachgewiesen. In Satz VIII.8 wird dann gezeigt, daß es zur Ausführbarkeit von EV2 ausreichend ist, wenn statt der Regularität von H auf der ganzen zum Niveau c gehörenden Niveaumenge dort nur die stetige Frechét-Differenzierbarkeit gefordert wird und außerdem die koniare Invertierbarkeit von H_x längs einer in der Niveaumenge eindeutig definierten Lösungskurve $\{(x(\lambda),\lambda)/\lambda\in[0,1]\}$ gesichert ist. In diesem Fall läßt sich nämlich die Regularität von H auf einem Schlauch um die Lösung folgern, und durch die adaptive Schrittweitenwahl ist bei EV2 garantiert, daß dieser Schlauch vom Verfahren nicht verlassen wird.

Das Verfahren EV2 stellt eine Verbesserung ähnlicher auf dem Newton-Verfahren basierender Einbettungsverfahren dar, wie sie in der Literatur etwa von AVILA in [4] oder von GRIFKA in [25] angegeben sind. Das von AVILA für Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ betrachtete Verfahren arbeitet mit einer global festgelegten Schrittweite $\Delta\lambda$, die so festgelegt ist, daß ebenfalls ein regulärer Schlauch um die Lösung vom Verfahren nicht verlassen wird. Da die Schrittweite einmalig für das ganze Verfahren festgelegt wird, muß sie sich zwangsläufig an der ungünstigsten Stelle des Iterationsweges orientieren und es sind zur Bestimmung der Schrittweite global gültige Regularitäts- und Lipschitzkonstanten erforderlich. Falls die Bestimmung bzw. Abschätzung dieser Konstanten überhaupt möglich ist, ergeben sich als Folge sehr kleine Schrittweiten, die zu entsprechend höherem numerischen Aufwand als bei EV2 führen. Das Verfahren von GRIFKA arbeitet ebenso wie EV2 mit einer adaptiven Schrittweitenwahl. Die Bestimmung der Schrittweite basiert dabei auf dem lokalen Nachweis der Voraussetzungen eines Konvergenzsatzes über das für $H(x,\lambda_{i+1})$ auszuführende Newton-Verfahren. Im Gegensatz zu EV2, wo bei der Schrittweitenbestimmung für jeden Schritt jeweils nur die Inverse von $H_x(x_i,\lambda_{i+1})$ relevant ist, muß hierzu in jedem Schritt die

Inverse von $H_x(x_i,\lambda)$ für $\lambda \in [\lambda_i,\lambda_{i+1}]$ abgeschätzt werden. Dies geschieht normalerweise mit Hilfe des Banach-Lemmas und führt gegenüber EV2 im allgemeinen zu kleineren Schrittweiten und höherem Aufwand.

In Kapitel IX wird festgestellt, daß sich ein gedämpftes Newton-ähnliches Verfahren für den Operator F formal als Sonderfall des Einbettungsverfahrens EV1 ergibt, wenn man zu einem Startwert $x_o \in D$ in (2.3) die Einbettungsfunktion

(2.5) $\forall (x,\lambda) \in D \times J : \quad H(x,\lambda) = F(x) - (1-\lambda) F(x_o)$

betrachtet und für die Verfahrenssteuerung das Niveau $\|F(x_o)\|$ zugrunde legt. Weil sich für diesen Sonderfall ein Teil der Schrittweitensteuerung von EV1 erübrigt und außerdem die zugehörigen Ausführbarkeitsvoraussetzungen nur für eingeschränkte Bereiche erfüllt sein müssen, wird das Verfahren hierfür unter der Bezeichnung EV3 gesondert formuliert. Falls EV3 ein gedämpftes Newton-Verfahren darstellt, d.h. falls die Inverse der Frechét-Ableitung von (2.5) in EV3 nicht durch eine Approximation ersetzt wird, ergibt sich durch eine geringfügige Modifikation in der Wahl der Dämpfungsfaktoren ein weiters gedämpftes Newton-Verfahren EV4. Dieses ebenfalls in Kapitel IX angegebene Verfahren unterscheidet sich von EV3 im wesentlichen dadurch, daß die Dämpfungsfaktoren nur aus einem eingeschränkten Intervall gewählt werden dürfen. Dadurch ist es möglich, Ausführbarkeitsvoraussetzungen auf einer Kugel um den Startwert statt auf einer Niveaumenge zu formulieren. Dies kann eventuell hilfreich sein, wenn man die Voraussetzungen verifizieren will.

Ausführbarkeitssätze für die Verfahren EV3 und EV4 werden in Kapitel X formuliert und bewiesen. Hierzu ist es erforderlich, in Anlehnung an die für Einbettungen H eingeführten Begriffe (wie z.B. Regularität, Niveaumenge oder Lipschitzeigenschaften) dort auch entsprechende Definitionen mit Bezug auf den Ausgangsoperator F anzugeben.

In Satz X.6 wird nachgewiesen, daß das Verfahren EV3 ausführbar ist, wenn bezüglich einer für den Operator F definierten Niveaumenge die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- Abgeschlossenheit der Niveaumenge
- Regularität von F auf der Niveaumenge
- Gültigkeit einer Lipschitzbedingung für F' auf der Niveaumenge.

Diese auf den Operator F bezogenen Eigenschaften sind analog zu den entsprechenden in Satz VII.5 genannten Ausführbarkeitsvoraussetzungen für EV1 formuliert, die sich jeweils auf eine Einbettungsfunktion H beziehen. Die in Satz VII.5 zusätzlich erhobene Forderung der Beschränktheit von H_λ kann hier entfallen, weil keine Schrittweitensteuerung bezüglich λ erforderlich ist.

Für das Verfahren EV4 ergeben sich in Satz X.10 Ausführbarkeitsvoraussetzungen, die völlig analog zu denen für EV3 aus Satz X.6 sind. Der einzige Unterschied bei den Voraussetzungen besteht darin, daß sich die Eigenschaften nicht auf eine zu F gehörende Niveaumenge beziehen, sondern auf eine Menge M_o, die sich als Durchschnitt einer Niveaumenge mit einer abgeschlossenen Kugel um den Startwert ergibt.

Sowohl EV3 als auch EV4 stellen mit den zugehörigen Ausführbarkeitsaussagen im Vergleich zu etlichen in der Literatur zu findenden Verfahren und Konvergenzsätzen wesentliche Verbesserungen dar. Diese Verbesserungen ergeben sich durch

- Verallgemeinerung der Anwendbarkeit der Verfahren (von Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ zu solchen auf beliebigen Banachräumen bzw. von Funktionen auf dem ganzen Urbildraum zu solchen mit beliebigen Teilgebieten als Definitionsbereich)
- Abgeschwächte Ausführbarkeits- bzw. Konvergenzvoraussetzungen
- Verminderung des numerischen Aufwandes zur Problemlösung (z.B. durch ausschließliche Verwendung lokaler Konstanten).

Im einzelnen gilt folgendes:

EV3 ist stets ausführbar, wenn die Voraussetzungen von Satz 2.2.1 bei FEILMEIER - LORY - SCHEURING - WACKER aus [19] erfüllt sind. Das gleiche gilt bezüglich der Voraussetzungen von Korollar 4.8 bei AVILA in [4], wobei sich dieses Korollar auf eine Aussage von MEYER in [40] bezieht. Obwohl die zum Vergleich genannten theoretischen Aussagen stärkere Voraussetzungen fordern, als sie zur Durchführung von EV3 erforderlich sind, sichern sie jeweils nur die Durchführung von erheblich aufwendigeren und weniger effektiven allgemeineren Einbettungsverfahren ab, deren Anwendung im Gegensatz zu EV3 daher nicht lohnend erscheint.

Die Ausführbarkeitsvoraussetzungen von EV3 sind gegenüber vergleichbaren gedämpften Newton-ähnlichen Verfahren von DEUFLHARD [14],[15] und von SCHWETLICK [50] abgeschwächt. Gleichzeitig ist die Anwendbarkeit von Operatoren in reellen Räumen zu solchen in beliebigen Banachräumen erweitert. In diesem Zusammenhang ist insbesondere zu erwähnen, daß die von DEUFLHARD wie auch von SCHWETLICK für die Ausführbarkeit erhobene Kompaktheitsforderung an die Niveaumenge bei EV3 durch die schwächere Forderung der Abgeschlossenheit ersetzt werden konnte. Beim Verfahren von DEUFLHARD führen darüber hinaus nicht optimale Normabschätzungen sowie Verwendung globaler Konstanten zu erheblich kleineren Dämpfungsfaktoren und dementsprechend zu höherem Aufwand als bei EV3.

Die Ausführbarkeitsvoraussetzungen für EV4 ergeben sich aus einem Teil der in [19] angeführten Voraussetzungen des Konvergenzsatzes 4.3.4 von FEILMEIER - LORY - SCHEURING - WACKER für ein auf KRASNOSELSKII [32] zurückgehendes Verfahren nach der Methode des minimalen Residuums. Das gleiche gilt für die ebenfalls in [19] angegebenen Voraussetzungen von Satz 4.3.11 für ein durch Einbettung erweitertes Verfahren.

Das Verfahren EV4 ist mit einem von PETRY in [44] vorgeschlagenen gedämpften Newton-Verfahren vergleichbar. Bei nahezu identischen Ausführbarkeitsvoraussetzungen ergibt sich für EV4 ein geringerer Aufwand bei der Durchführung. Dies rührt daher, daß wegen der ausschließlichen Verwendung lokaler Größen zur Bestimmung der Dämpfungsfaktoren weniger bzw. leichtere theoretische Abschätzungen erforderlich sind und sich dabei normalerweise als Folge größerer Dämpfungsfaktoren gleichzeitig weniger Iterationsschritte ergeben.

Wenn die jeweiligen Inversen der Fréchet-Ableitungen bei den vier in dieser Arbeit betrachteten Einbettungsverfahren nicht durch Näherungen approximiert sind, so gehen diese Verfahren nach endlich vielen Schritten in das gewöhnliche Newton-Verfahren für den Operator F über, falls die zugehörigen Ausführbarkeitsvoraussetzungen erfüllt sind. Darüber hinaus gelten dann ab einem geeigneten Iterationsindex auch die Voraussetzungen eines Konvergenzsatzes über das Newton-Verfahren für den Operator F. Folglich können nach hinreichend vielen Iterationsschritten die Fehlerabschätzungen dieses Satzes vom Kantorowitsch - Typ angewendet werden.

Entsprechend der Natur von Einbettungsverfahren, die ja möglichst auch bei weit von der Lösung entfernten Startwerten noch eine erfolgreiche Iteration ermöglichen sollen, sind die Möglichkeiten zur Angabe von a-priori Fehlerabschätzungen oder auch von Fehlerabschätzungen für die ersten Iterationsschritte ausgesprochen dürftig. Da man den Iterationsverlauf im Vorhinein nicht kennt, würden in solche Angaben zur Fehlerabschätzung Konstanten eingehen müssen, die für die ganze jeweilige Niveaumenge gültig sind. Abgesehen davon, daß solche Konstanten kaum zu ermitteln sind, führt ihre Anwendung zu praktisch nicht brauchbaren Resultaten.

Neben den Schwierigkeiten bei der Angabe von Fehlerabschätzungen vor Erreichen der Lösung gibt es noch eine Reihe weiterer typischer Probleme, die vor oder während der Durchführung von Einbettungsverfahren auftreten können und gegebenenfalls den Erfolg des Verfahrens entscheidend beeinflussen. Anhand eines einfachen überschaubaren Beispiels werden die wesentlichen dieser Probleme in Kapitel XI erläutert. Daran anschließend wird in Kapitel XII die Anwendung von Einbettungsverfahren an praktischen Beispielen veranschaulicht. An einem nichtlinearen Gleichungssystem sowie einigen Integralgleichungsproblemen zeigt sich, daß oft die Anwendung von EV3 ausreichend ist, wenn das Newton-Verfahren bei der Durchführung nicht die gewünschten Ergebnisse bringt. Bei der Lösung von Randwertproblemen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen erweist sich dagegen EV1 in Verbindung mit einer natürlichen Einbettung über einen Gleichungsparameter als nützlich.

Die numerisch aufwendigeren Verfahren EV2 bzw. EV4 brauchen bei den Beispielen nicht herangezogen werden. Sie sind in Bezug auf die abgeschwächten Ausführbarkeitsvoraussetzungen auch mehr von theoretischem Interesse. Auch bei weiteren untersuchten aber hier nicht angeführten Beispielen zeigte sich, daß es schwierig ist, ein nicht eigens dazu konstruiertes Problem zu finden, bei dem EV2 bzw. EV4 ausführbar ist, aber EV1 bzw. EV3 nicht.

III. BEZEICHNUNGEN, ABKÜRZUNGEN UND SCHREIBWEISEN

In dieser Arbeit werden generell alle Abbildungen, Räume und Mengen mit großen Buchstaben und die Elemente von Mengen und Vektorräumen mit kleinen Buchstaben bezeichnet. Aus Gründen der Einheitlichkeit und Übersichtlichkeit werden dabei für gleichartige Objekte möglichst auch stets die gleichen Bezeichnungen verwendet. Soweit aus der Literatur allgemein übliche Bezeichnungen vorgegeben waren wurde versucht, diese hier beizubehalten. Dadurch ließen sich gelegentlich Doppelbezeichnungen nicht immer vermeiden. Verständnisschwierigkeiten sind hieraus jedoch nicht zu befürchten, da die entsprechende Bedeutung aus dem jeweiligen Zusammenhang ersichtlich ist. Zur Übersicht werden im folgenden die wichtigsten in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen, Abkürzungen und Schreibweisen zusammengestellt.

$a := b$ $b =: a$	a wird durch b definiert
$\forall$	für alle ...
$\exists$	(es) existiert (mindestens) ein
$\in$	Element von
$\subset$	Teilmenge von
$A \cap B$	Durchschnitt der Mengen A und B
$A \cup B$	Vereinigung der Mengen A und B
$A \times B$	kartesisches Produkt der Mengen A und B
$\bigcup_{k \in K} A_k$	Vereinigung der Mengen A_k für $k \in K$ (K = Indexmenge)
:	in Formeln und Aussagen für "gilt" bzw. "so daß gilt"
$\doteq$	auf die angegebene Stellenzahl gerundetes Ergebnis
$\approx$	ungefähr gleich
$\equiv$	identisch gleich
$\Longrightarrow$	Implikation
$\Longleftrightarrow$	Äquivalenz (genau dann, wenn)
$\blacktriangle$	Beweisende
$[x]$	größte ganze Zahl z mit $z \leq x$
dund	dann und nur dann, wenn
koniar	stetig und linear
G(.)	Bezeichnung, die angibt, daß man den Wert der Abbildung G an einer Stelle x des Definitionsbereiches erhält, wenn man x an die Stelle von "." einsetzt
X, Y, Z	Banachräume

$C[0,1]$	Menge der auf dem Intervall $[0,1]$ stetigen reellwertigen Abbildungen
$C^n[0,1]$	Menge der auf dem Intervall $[0,1]$ n - mal stetig Fréchet-differenzierbaren reellwertigen Abbildungen
$C(D,Z)$	Menge der auf D definierten nach Z abbildenden stetigen Funktionen
$C^n(D,Z)$	Menge der auf D definierten nach Z abbildenden n - mal stetig Fréchet-differenzierbaren Abbildungen
c	Niveau für ein Einbettungsverfahren
D	Definitionsbereich von Abbildungen (offene Teilmenge eines Banachraumes)
d	Approximationsgüte der Näherung für die Inverse der Fréchet-Ableitung H_x einer Einbettungsfunktion
H	Bezeichnung für Einbettungen
$\tilde{H}$	Bezeichnung für Einbettungsfamilien
$I : X \to X$	identische Abbildung (auf dem Banachraum X)
J	$(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$
K1, K2, K3	Funktionen zur Formulierung von Lipschitzbedingungen
L1, L2, L3	Lipschitzbedingungen
$L(Z,X)$	Menge der koniaren Abbildungen von Z nach X
M	Bezeichnung von Niveaumengen
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_o$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\forall\, i > i_o$	$\forall\, i \in \mathbb{N}$ mit $i > i_o$, wobei $i_o \in \mathbb{N}$ oder $i_o \in \mathbb{N}_o$ ist (analoges gilt bezüglich der Indizes k bzw. l statt i und mit der Ungleichung $\geq$ statt $>$)
q	Steuerparameter für Einbettungsverfahren
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+$	Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+^o$	$\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$
$\mathbb{R}^n$	euklidischer Vektorraum der Dimension n
$S(x_o,r)$	offene Kugel um x_o mit Radius r
$\overline{S}(x_o,r)$	Abschluß von $S(x_o,r)$
$T : D \to Z$	Abbildung T von D nach Z
β	Schranke für die Inversen von H_x auf einer Niveaumenge
γ	Schranke für H_λ auf einer Niveaumenge
κ	Lipschitzschranke auf einer Niveaumenge
λ	Einbettungsparameter

$\left.\begin{matrix}\mu\\ \omega\end{matrix}\right\}$	Dämpfungsfaktoren
ϱ	Steuerparameter für Einbettungsverfahren
$x'(t_o)$	$\frac{d\,x(t)}{dt}\,\big|_{t=t_o}$ Fréchet-Ableitung von x an der Stelle t_o
$F'(x_o)$	$\frac{d\,F(x)}{dt}\,\big|_{x=x_o}$ Fréchet-Ableitung von F an der Stelle x_o
$F''(x_o)$	$\frac{d^2F(x)}{d^2x}\,\big|_{x=x_o}$ zweite Fréchet-Ableitung von F an der Stelle x_o
$H_x(x_o,\lambda_o)$	$\frac{\partial\,H(x,\lambda_o)}{\partial\,x}\,\big|_{x=x_o}$ partielle Fréchet-Ableitung von H nach x an der Stelle (x_o,λ_o)
$H_\lambda(x_o,\lambda_o)$	$\frac{\partial\,H(x_o,\lambda)}{\partial\,\lambda}\,\big|_{\lambda=\lambda_o}$ partielle Fréchet-Ableitung von H nach λ an der Stelle (x_o,λ_o)
$\left.\begin{matrix}H'(x_o,\lambda_o)\\ H''(x_o,\lambda_o)\end{matrix}\right\}$	erste bzw. zweite Fréchet-Ableitung von H an der Stelle (x_o,λ_o)
$F'^{-1}(x_i)$	Inverse von $F'(x_i)$
$H_x^{-1}(x_i,\lambda_i)$	Inverse von $H_x(x_i,\lambda_i)$
$\tilde{H}_x^{-1}(x_i,x_i,\lambda_i)$	Inverse von $\tilde{H}_x(x_i,x_i,\lambda_i)$

Die Kapitel dieser Arbeit sind mit römischen Ziffern chronologisch numeriert. Innerhalb der Kapitel sind sämtliche Sätze, Hilfssätze, Korollare, Definitionen, Bemerkungen und Beispiele fortlaufend durchnumeriert, wobei die römische Kapitelnummer vorangestellt ist. (z.B. IV.1 oder VII.5)

Formeln, Gleichungen und andere Aussagen, auf die im nachfolgenden Text Bezug genommen wird, sind ebenfalls kapitelweise durchnumeriert. Dabei wird die Kapitelnummer in arabischen Ziffern vorangestellt und die gesamte Verweisnummer in Klammern eingeschlossen. (z.B. (5.2) oder (8.55))

IV. GRUNDLEGENDE DEFINITIONEN UND SÄTZE

In diesem Kapitel werden alle Definitionen bereitgestellt, die zur Formulierung der vorgesehenen Iterationsverfahren zunächst erforderlich sind. Außerdem werden aus der Literatur einige Sätze - ohne Beweis - aufgeführt, die beim Beweis von später formulierten Existenz- und Konvergenzaussagen eine wesentliche Rolle spielen.

IV.1 Definition:

Es seien X, Z Banachräume, $\emptyset \neq D$ offen $\subset X$, $F : D \to Z$, $\varepsilon_o \in \mathbb{R}_+$, $J := (-\varepsilon_o, 1+\varepsilon_o)$.

Eine Abbildung $H : D \times J \to Z$ heißt Einbettung für F dund gilt

(4.1) $\forall\, x \in D : \quad H(x,1) = F(x)$.

Sie heißt Einbettung für F bezüglich $x_o \in D$ dund zusätzlich zu (4.1) gilt

(4.2) $H(x_o,0) = 0$.

IV.2 Definition:

Es seien X, Z Banachräume, $\emptyset \neq D$ offen $\subset X$, $F : D \to Z$, $\varepsilon_o \in \mathbb{R}_+$, $J := (-\varepsilon_o, 1+\varepsilon_o)$.

Eine Abbildung $\tilde{H} : D \times D \times J \to Z$ heißt Familie von Einbettungen für F oder Einbettungsfamilie für F dund gilt

(4.3) $\forall\, x \in D : \quad \tilde{H}(x,x,0) = 0$ und

(4.4) $\forall\, x,y \in D : \quad \tilde{H}(x,y,1) = F(x)$.

IV.3 Bemerkung

Einbettungsfamilien werden in der Literatur unter anderem von SCHWETLICK in [48] sowie von DEN HEIJER in [11] verwendet. Bei beiden Autoren dienen die Einbettungsfamilien dabei zur Definition sogenannter Einbettungszyklen während derer die Einbettungsfunktion unverändert beibehalten wird. SCHWETLICK erzeugt dabei zu vorgegebenem $x_i \in D$ und $\varepsilon_i > 0$ mit Hilfe des Prinzips vom "hinreichend schwachen Anstieg" und unter Verwendung von $\tilde{H}(x,x_i,\lambda)$ jeweils ein $x_{i+1} \in D$ mit $\|\tilde{H}(x_{i+1},x_i,1)\| < \varepsilon_i$. Ausgehend von x_{i+1} kann dann mit $\tilde{H}(x,x_{i+1},\lambda)$ und verkleinertem ε_{i+1} der nächste Zyklus durchlaufen werden, so daß die Lösung von F bei geeigneten Voraussetzungen beliebig genau approximiert

werden kann. DEN HEIJER verwendet Einbettungsfamilien zur Lösung von Operatorgleichungen mit Anfangswertmethoden. In einem Zyklus wird dabei jeweils für festes $x_i \in D$ die Davidenko-Gleichung (siehe (1.5)) mit Runge-Kutta-ähnlichen Verfahren bis $\lambda = 1$ integriert, um dann mit der für die Lösung von F erhaltenen Näherung als neuem Startwert x_{i+1} den nächsten Einbettungszyklus zu durchlaufen.

Bei beiden Autoren kann die Anwendung der Einbettungsfamilien so verstanden werden, daß mit ihrer Hilfe "Nachiterationen" möglich sind, durch die eine mittels einer festen Einbettung erhaltene Näherung für die Lösung beliebig oft verbessert werden kann. Auf diese Weise ist es insbesondere möglich, für die verwendeten Verfahren Konvergenzaussagen zu machen. In der Anwendung zeigt sich dann aber, daß die Einbettungsfamilien praktisch kaum zum tragen kommen, denn bei beiden Autoren ist in den angeführten Beispielen die vorgeschriebene Genauigkeit bereits nach dem Durchlaufen des ersten Zyklus erreicht, so daß die Verfahren hierfür identisch sind mit denen, die mit einer festen Einbettung definiert sind. Die Einbettungsfamilien haben daher in Bezug auf die angeführten Beispiele nur theoretische - weil konvergenzsichernde - aber kaum praktische Bedeutung. Demgegenüber sollen in dieser Arbeit die Einbettungsfamilien so verwendet werden, daß gegebenenfalls jeder Einbettungsschritt mit einer neuen Einbettungsfunktion durchgeführt wird. So kann die Verfahrensfunktion mit fortschreitender Iteration den jeweiligen Iterierten angepaßt werden und so unter Umständen Schritt für Schritt verbessert werden.

Wegen ihrer einfachen Struktur werden sowohl in der Literatur wie auch in dieser Arbeit in erster Linie affine Einbettungen bzw. Einbettungsfamilien verwendet, die folgendermaßen definiert sind:

IV.4 Definition:

Eine Einbettung H für F heißt affin dund Funktionen H_o, $H_1 : D \to Z$ existieren, so daß

(4.5) $\forall (x,\lambda) \in D \times J : \quad H(x,\lambda) = H_o(x) + \lambda H_1(x).$

Eine Einbettungsfamilie $\tilde{H}$ für F heißt affin dund Funktionen H_o, $H_1 : D \times D \to Z$ existieren, so daß

(4.6) $\forall (x,y,\lambda) \in D \times D \times J : \quad H(x,y,\lambda) = H_o(x,y) + \lambda H_1(x,y).$

IV.5 Bemerkung

Ist H eine affine Einbettung, so gilt wegen (4.1)
$\forall\, x \in D: \quad H(x,1) = H_0(x) + H_1(x) = F(x)$ und damit
$\forall\, x \in D: \quad H_1(x) = F(x) - H_0(x).$

Deshalb hat jede affine Einbettung stets die Form

(4.7) $\forall\, (x,\lambda) \in D \times J: \quad H(x,\lambda) = H_0(x) + \lambda\,(F(x) - H_0(x))$

$= \lambda\, F(x) + (1-\lambda)\, H_0(x)$

mit einer Funktion $H_0 : D \to Z$. Falls H eine Einbettung für F bezüglich x_0 ist, so gilt dabei wegen (4.2)

$H_0(x_0) = H(x_0,0) = 0.$

Entsprechend gilt für jede Einbettungsfamilie wegen (4.4)
$\forall\, x, y \in D: \quad \tilde{H}(x,y,1) = H_0(x,y) + H_1(x,y) = F(x),$ so daß
$\forall\, x, y \in D: \quad H_1(x,y) = F(x) - H_0(x,y).$

Durch Einsetzen in (4.6) folgt daraus, daß jede affine Einbettungsfamilie stets die Form

(4.8) $\forall\, (x,y,\lambda) \in D \times D \times J: \quad \tilde{H}(x,y,\lambda) = \lambda\, F(x) + (1-\lambda)\, H_0(x,y)$

mit einer Funktion $H_0 : D \times D \to Z$ besitzt. Wegen (4.3) gilt dabei für H_0

(4.9) $\forall\, x \in D: \quad H_0(x,x) = 0.$

IV.6 Definition:

Es sei H eine Einbettung für F.
Eine Abbildung $x : J \to D$ mit der Eigenschaft

(4.10) $\forall\, \lambda \in [0,1]: \quad H(x(\lambda),\lambda) = 0$

heißt Lösung der Einbettung H.

IV.7 Bemerkung

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß der Buchstabe x sowohl zur Bezeichnung eines Vektors aus dem Definitionsbereich D als auch zur Bezeichnung der Lösung (als Abbildung von J in D) verwendet wird. Diese Bezeichnungsweise ist in der Literatur allgemein üblich und soll deshalb aus Gründen der Einheitlichkeit hier beibehalten werden. Im konkreten Fall geht aus dem Zusammenhang (z.B. durch An-

fügen des Argumentes) in der Regel klar hervor, welche Bedeutung x gerade hat, so daß Verständnisschwierigkeiten nicht zu befürchten sind.

IV.8 Definition:

Es sei H eine Einbettung für F bezüglich x_0. Für $c \geq 0$ sei

$$M_0(H,x_0,c) := \{(x,\lambda) \in D \times [0,1] \mid \|H(x,\lambda)\| \leq c\} \quad . \tag{4.11}$$

Dann bezeichnet $M(H,x_0,c)$ die Zusammenhangskomponente von $M_0(H,x_0,c)$, in der $(x_0,0)$ enthalten ist.

$M(H,x_0,c)$ heißt Niveaumenge zur Einbettung H bezüglich x_0 mit dem Niveau c.

IV.9 Bemerkung

Die Niveaumengen für Einbettungen spielen bei der Formulierung von Existenz- und Konvergenzaussagen in dieser Arbeit eine wesentliche Rolle. Zu vorgegebenem c werden unter dem Gesichtspunkt der "Defektreduzierung" in allen betrachteten Iterationsverfahren nur solche Iterierte erzeugt, die innerhalb der entsprechenden Niveaumenge liegen. Deshalb läßt sich der Gültigkeitsbereich, in dem Voraussetzungen für Existenz- bzw. Konvergenzaussagen zu fordern sind, an die Niveaumengen koppeln. Die Größe von c hat dabei für das Ausmaß der Niveaumenge ebenso wie für den Ablauf der Iterationsverfahren entscheidende Bedeutung. Je größer c ist, desto umfangreicher ist die Niveaumenge und damit der Bereich, in dem die Voraussetzungen erfüllt sein müssen. Gleichzeitig sind in den betrachteten Verfahren aber bei größerem c auch größere Schrittweiten möglich, so daß die Verfahren bei erfüllten Voraussetzungen effektiver, d.h. schneller konvergent werden. Für die Anwendung stellt sich somit das Problem, zu einer Einbettung H und einem Startwert x_0 ein möglichst großes c zu finden, für das die Existenz- und Konvergenzvoraussetzungen bezüglich $M(H,x_0,c)$ noch erfüllt sind. In der Praxis erweist sich die Bestimmung eines solchen optimalen Wertes c als ausgesprochen schwierig. Dies gilt in erster Linie deshalb, weil die Menge $M(H,x_0,c)$ in der Regel nicht genau bestimmt werden kann. Normalerweise stellt die exakte Bestimmung einer Niveaumenge ein Problem vom gleichen Schwierigkeitsgrade dar wie die Lösung der Ursprungsgleichung $F(x) = 0$. Das erkennt man z.B. schon daran, daß im Falle $c = 0$ bei der Bestimmung von $M(H,x_0,0)$

die Menge aller Lösungen von $H(x,\lambda) = 0$, ($\lambda \in [0,1]$) ermittelt werden muß, worin bei $\lambda = 1$ die Lösung für $F(x) = 0$ enthalten ist. Wenn man also die Ausgangsgleichung $F(x) = 0$ nicht unmittelbar lösen kann und deshalb zum Hilfsmittel der Einbettung greift, so wird im allgemeinen die Bestimmung einer zugehörigen Niveaumenge ebensowenig exakt möglich sein. Im konkreten Fall ergeben sich deshalb oft nur die folgenden beiden Möglichkeiten: entweder man schätzt die Niveaumenge $M(H,x_o,c)$ durch eine geeignete Obermenge $\overline{M}$ ab (gröbstenfalls durch den ganzen Definitionsbereich von H) und beweist die Voraussetzungen bezüglich $\overline{M}$, oder man verzichtet a-priori auf den Nachweis der Voraussetzungen und führt im Falle der Nichtkonvergenz das Verfahren mit sukzessive verkleinerten Schranken c_i ($i \in \mathbb{N}$) aus, bis sich Konvergenz einstellt (Try and error).

Trotz dieser Schwierigkeiten in Bezug auf die Anwendung sind die Niveaumengen für die betrachteten Verfahren von großer theoretischer Bedeutung, weil sich mit ihnen die kleinstmöglichen Mengen beschreiben lassen, auf denen die Voraussetzungen für Existenz einer Lösung und Konvergenz der Einbettungsverfahren zu fordern sind. In der Literatur finden sich ebenfalls Aussagen über Iterationsverfahren, bei denen die Voraussetzungen an Niveaumengen geknüpft sind. Diesbezüglich sei unter anderem verwiesen auf DEUFLHARD - PESCH - RENTROP [13] (Theorem 1.1), DEUFLHARD [14] (Theorem 3.2 und 3.3) und STOER [51] (Sätze 5.4.1.4, 5.4.1.8 und 5.4.2.5).

Die in dieser Arbeit untersuchten Iterationsverfahren sind als Einbettungsverfahren durch die folgende Definition charakterisiert:

IV.10 Definition:

Eine Verfahrensvorschrift, die eindeutig festlegt, wie unter Verwendung einer Einbettung bzw. einer Einbettungsfamilie zu einem Wertepaar $(x_i,\lambda_i) \in D \times [0,1]$ ein Nachfolger $(x_{i+1},\lambda_{i+1}) \in X \times [0,1]$, ($i \in \mathbb{N}_o$) zu bestimmen ist, heißt Einbettungsverfahren.

Gemäß dieser Definition handelt es sich bei einem Einbettungsverfahren um eine formale Zuordnungsvorschrift. Zur Beschreibung der Eigenschaften eines solchen Verfahrens sowie zur Charakterisierung des Verhaltens des Verfahrens im Anwendungsfall dienen die nachfolgend festgelegten Begriffe:

IV.11 Definition:

Ein Einbettungsverfahren heißt für einen Startwert $x_o \in D$ wohldefiniert dund die Zuordnungsvorschrift von (x_i,λ_i) zu (x_{i+1},λ_{i+1}) ausgehend von $(x_o,0)$ für alle $i \in \mathbb{N}_o$ wohldefiniert ist.

Ein Einbettungsverfahren heipt für einen Startwert $x_o \in D$ ausführbar dund gilt:

i) das Einbettungsverfahren ist für x_o wohldefiniert

ii) die Folge der (x_i,λ_i), $(i \in \mathbb{N}_o)$ konvergiert ausgehend von $(x_o,0)$ in der Norm auf $X \times \mathbb{R}$ gegen ein $(x^*,1) \in D \times \{1\}$ mit $H(x^*,1) = 0$.

Für die unter ii) genannte Eigenschaft wird abkürzend die Bezeichnung verwendet, daß das Einbettungsverfahren für x_o lösungskonvergent ist.

Ein Einbettungsverfahren heißt auf einer Menge $M \subset D$ ausführbar dund es für jedes $x_o \in M$ ausführbar ist.

IV.12 Bemerkungen

IV.12.1

Ein ausführbares Einbettungsverfahren ist auf einer elektronischen Rechenanlage direkt implementierbar und liefert - unter Vernachlässigung der Rundungsfehlereinflüsse - jeweils in endlich vielen Schritten eine im Rahmen der vorhandenen Stellenziffern beliebig genaue Approximation für die Lösung x^* von $F(x) = 0$. Damit unterscheidet sich der Begriff der "Ausführbarkeit" für ein Einbettungsverfahren wesentlich von dem der "Durchführbarkeit", wie er z.B. von FEILMEIER - LORY - SCHEURING - WACKER in [19] verwendet wird. Die dort betrachteten Stufenverfahren werden "durchführbar" genannt, wenn es endlich viele Werte $0 = \lambda_o < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = 1$ gibt, so daß das Newton-Verfahren für $H(x,\lambda_{i+1}) = 0$ ausgehend von $x(\lambda_i)$ (also der Lösung an der Stelle λ_i) gegen $x(\lambda_{i+1})$ konvergiert. Die exakte Bestimmung von $x(\lambda_{i+1})$ aus $x(\lambda_i)$ stellt dabei einen infinitesimalen Prozess dar, und die Lösung der Gleichung $F(x) = 0$ besteht folglich darin, endlich viele dieser Prozesse nacheinander auszuführen. Dies läßt sich so auf einem Computer natürlich nicht realisieren. Vielmehr wird man bei der jeweiligen Berechnung von $x(\lambda_i)$ die Iteration nach endlich vielen Schritten (z.B. bei Erreichen einer festgelegten Fehlerschranke) abbrechen und die so erhaltene Näherung $\bar{x}(\lambda_i)$ statt $x(\lambda_i)$ zum Ausgangspunkt der Iteration bei λ_{i+1} machen. Führt man das Stufenverfahren auf diese

Weise rechnerisch durch, so kann aus den in [19] angeführten Sätzen über die Ausführbarkeit [z.B. Satz 2.2.1, Satz 2.2.13, Satz 3.1.1, Satz 3.1.15 etc.) keine Aussage darüber abgeleitet werden, ob das jeweilige Verfahren letztlich gegen eine Lösung von $F(x) = 0$ konvergiert oder nicht. Die stufenweise Konvergenz gegen $x(\lambda_{i+1})$ ist nämlich nach den oben genannten Sätzen nur gesichert, wenn die Iteration der entsprechenden Stufe bei $x(\lambda_i)$ gestartet wird. Außer bei $x(0) = x_0$ ist das aber normalerweise gerade nicht der Fall, weil in endlich vielen Schritten nur eine mehr oder minder genaue Näherung $\bar{x}(\lambda_i)$ für $x(\lambda_i)$ erhalten werden kann. Die Divergenz des Newton-Verfahrens für die i+1 - te Stufe mit $\bar{x}(\lambda_i)$ als Startwert ist theoretisch auch bei guter Näherung nicht auszuschließen.

IV.12.2

Der Begriff der Ausführbarkeit für ein Einbettungsverfahren unterscheidet sich auch sehr wesentlich von dem der "feasibility" wie er bei AVILA in [4] verwendet wird. Während der Begriff der Ausführbarkeit in dieser Arbeit jeweils an ein konkretes Einbettungsverfahren gebunden ist, sichert die Eigenschaft der "feasibility" bei AVILA lediglich die Existenz eines ausführbaren Einbettungsverfahrens. Zu einer bestimmten Einbettung H bezieht sich damit der Begriff der "feasibility" auf die prinzipielle Anwendbarkeit der Einbettungsmethode, derjenige der Ausführbarkeit dagegen auf ein spezielles Verfahren.

IV.12.3

Gemäß (4.1) konvergiert bei einem lösungskonvergenten Einbettungsverfahren die Folge der x_i gegen ein $x^* \in D$ mit $F(x^*) = 0$, so daß das Ausgangsproblem auf diese Weise gelöst werden kann. Zur Beschreibung dieses Sachverhaltes reicht es nicht aus, für das Einbettungsverfahren lediglich Konvergenz zu fordern. Bei den betrachteten Verfahren ist es nämlich unter Umständen möglich, daß Konvergenz gegen ein $(x^*,\lambda^*) \in D \times [0,1]$ eintritt ohne daß $F(x^*) = 0$ gilt. Dies tritt bei Verwendung Newton-ähnlicher Verfahren insbesondere in dem Fall auf, daß innerhalb der zum Einbettungsverfahren gehörenden Niveaumenge $M(H,x_0,c)$ Singularitäten (x_s,λ_s) von $H_x(x,\lambda)$ liegen. Wenn das Verfahren auf eine solche singuläre Stelle trifft bzw. wenn es sogar ein $\lambda_s \in [0,1]$ gibt, so daß $H_x(x(\lambda_s),\lambda_s)$ singulär ist, so kann es diese Stelle nicht überwinden, sondern es läuft sich an dieser Stelle fest. Will man deshalb für ein

Einbettungsverfahren die Eigenschaft der Lösungskonvergenz theoretisch absichern, so muß die Existenz solcher Singularitäten in der betreffenden Niveaumenge bzw. in einer geeigneten Umgebung um die Lösung ausgeschlossen werden. Hierzu bedient man sich unter anderem der folgenden Definition:

IV.13 Definition:

Es sei H eine Einbettung für F und $M \subset D \times J$.
Dann heißt H auf M regulär dund gilt:

(4.12) Es existiert eine offene Umgebung U von M mit $U \subset D \times J$ auf der H nach x und λ stetig partiell Fréchet-differenzierbar ist.

(4.13) Es existiert eine Konstante β $(=\beta(M)) > 0$, so daß gilt:
$\forall (x,\lambda) \in M$ besitzt $H_x(x,\lambda)$ eine koniare Inverse $H_x^{-1}(x,\lambda)$
mit $\|H_x^{-1}(x,\lambda)\| \leq \beta$.

Die Konstante β heißt Regularitätskonstante zu H auf M.

IV.14 Bemerkung

Der Begriff der Regularität für Einbettungen wurde den Arbeiten von SCHWETLICK [48], [49] und MENZEL - SCHWETLICK [39] entnommen. Allerdings werden in diesen Arbeiten nur Operatoren $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und folglich auch nur Einbettungen $H : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ betrachtet. Infolgedessen bezieht sich die Eigenschaft der Regularität bei MENZEL - SCHWETLICK jeweils auf ganz $\mathbb{R}^n \times [0,1]$. Weil in dieser Arbeit Operatoren untersucht werden, die eventuell nur auf Teilmengen beliebiger Banachräume definiert sind, mußte die Definition der Regularität dieser Zielsetzung angepaßt und lokal formuliert werden. Eine Einbettung ist danach regulär im Sinne von MENZEL und SCHWETLICK, wenn sie gemäß Definition IV.13 regulär auf $\mathbb{R}^n \times [0,1]$ ist.

IV.15 Definition:

Es seien X, Z Banachräume, $\emptyset \neq D$ offen $\subset X$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$,
$T : D \times J \to Z$, $M \subset D \times J$.
Dann sagen wir:
T erfüllt die Lipschitzbedingung L1(M) dund

a) eine offene Umgebung U von M mit $U \subset D \times J$,
b) eine stetige Funktion $K1 : U \times X \times [0,1] \to \mathbb{R}_+^o$ und
c) eine positive reelle Zahl $\varkappa$

existieren, so daß für alle $(x,\lambda) \in M$, $y \in X$, μ, μ_1, $\mu_2 \in [0,1]$ gilt:

(4.14) $\quad (\forall\, \tau \in [0,\mu] : (x+\tau y,\lambda) \in U) \Longrightarrow$

$\forall\, \tau \in [0,\mu] : \|T(x+\tau y,\lambda) - T(x,\lambda)\| \leq K1(x,\lambda,y,\mu)\, \|\tau y\|$

(4.15) $\quad \mu_1 \leq \mu_2 \Longrightarrow K1(x,\lambda,y,\mu_1) \leq K1(x,\lambda,y,\mu_2)$

(4.16) $\quad (\forall\, \tau \in [0,\mu] : (x+\tau y,\lambda) \in M) \Longrightarrow K1(x,\lambda,y,\mu) \leq \kappa$.

Ferner sagen wir:

T erfüllt die Lipschitzbedingung L2(M) dund

a) eine offene Umgebung U von M mit $U \subset D \times J$
b) eine stetige Funktion $K2 : U \times \mathbb{R}_+^0 \to \mathbb{R}_+^0$ und
c) eine positive Konstante κ

existieren, so daß für alle $(x,\lambda) \in M$, ξ, ξ_1, $\xi_2 \in \mathbb{R}_+^0$ gilt:

(4.17) $\quad \forall\, y \in X : (\|y\| \leq \xi \wedge \forall\, t \in [0,1] : (x+ty,\lambda) \in U) \Longrightarrow$
$\|T(x+y,\lambda) - T(x,\lambda)\| \leq K2(x,\lambda,\xi)\, \|y\|$

(4.18) $\quad \overline{S}(x_1,\xi_1) \subset \overline{S}(x_2,\xi_2) \Longrightarrow K2(x_1,\lambda,\xi_1) \leq K2(x_2,\lambda,\xi_2)$

(4.19) $\quad K2(x,\lambda,\xi) \leq \kappa$.

IV.16 Bemerkungen

IV.16.1

Die Funktionen K1 bzw. K2 werden bei den später definierten Einbettungsverfahren benötigt, um lokale Größen zur Schrittweitensteuerung bereitzustellen. Dabei lassen sich durch die Verwendung der unterschiedlichen Funktionen K1 bzw. K2 lokal verschiedene, dem jeweiligen Verfahren angepaßte Lipschitzkonstanten angeben.

Die Lipschitzfunktion K1 gestattet es, für jedes $(x,\lambda) \in M$, $y \in X$ und $\mu \in [0,1]$ eine lokale Lipschitzschranke der Abbildung T über der Strecke $\{(x+\tau y,\lambda) \mid \tau \in [0,\mu]\}$ anzugeben, wenn diese in der offenen Umgebung U von M verläuft. Dabei sind diese lokalen Schranken durch κ beschränkt, solange die Strecken in M verlaufen.

Mit Hilfe der Lipschitzfunktion K2 ist es dagegen möglich, bezüglich T zu jedem $(x_0,\lambda_0) \in M$ und $\zeta \in \mathbb{R}_+^0$ eine durch κ beschränkte gemeinsame Lipschitzschranke für alle Elemente $(x,\lambda_0) \in \overline{S}(x_0,\zeta) \times \{\lambda_0\}$ anzugeben,

bei denen die Verbindungsstrecke zwischen (x,λ_o) und (x_o,λ_o) ganz in U verläuft.

IV.16.2

Es gilt

(4.20) T erfüllt die Lipschitzbedingung L1(M), falls T die Lipschitzbedingung L2(M) erfüllt.

Diese Aussage ergibt sich trivialerweise, wenn man bei Gültigkeit von L2(M) auf der dann existierenden Umgebung U von M für L1(M) als Lipschitzfunktion die konstante Funktion $K1 := \kappa$ verwendet. Aus der Lipschitzfunktion K2 läßt sich für die Gültigkeit von L1(M) aber auch eine Lipschitzfunktion K1 ableiten, die eine schärfere Abschätzung als durch die Konstante κ gestattet. Hierzu definiert man:

(4.21) $\forall\ (x,\lambda) \in U,\ y \in X,\ \mu \in (0,1] :\ K1(x,\lambda,y,\mu) := K2(x,\lambda,\|\mu y\|)$.

Es ergibt sich dann (4.14) aus (4.17), da K2 stetig ist und stets $\{(x+\tau y,\lambda) \mid \tau \in [0,\mu]\} \subset \overline{S}(x,\|\mu y\|) \times \{\lambda\}$ gilt.
(4.15) folgt aus (4.18) und (4.16) aus (4.19).

IV.16.3

Falls T auf einer offenen Umgebung U von M stetig Fréchet-differenzierbar ist mit

(4.22) $\forall\ (x,\lambda) \in U :\quad \|T_x(x,\lambda)\| \leq \kappa$,

so gilt infolge des Mittelwertsatzes (vergl. z.B. DIEUDONNÉ [16], 8.5.2):

T erfüllt die Lipschitzbedingung L1(M) mit

(4.23) $\forall\ (x,\lambda) \in U,\ y \in X,\ \mu \in [0,1]$:
$K1(x,\lambda,y,\mu) := \sup\ \{\ \|T_x(x+\tau y,\lambda)\ \mid\ \tau \in [0,\mu],\ (x+\tau y,\lambda) \in U\ \}$

und

T erfüllt die Lipschitzbedingung L2(M) mit

(4.24) $\forall\ (x,\lambda) \in U,\ \zeta \in \mathbb{R}_+^o$:
$K2(x,\lambda,\zeta) := \sup\ \{\ \|T_x(x+y,\lambda)\| \mid \|y\| \leq \zeta,\ (x+y,\lambda) \in U\ \}$.

Da bei der Anwendung der Einbettungsverfahren die betrachteten Operatoren in der Regel geeignete Differenzierbarkeitseigenschaften besitzen, werden hauptsächlich die in (4.23) und (4.24) definierten Lipschitzfunktionen verwendet.

Für den Nachweis von Existenz- und Konvergenzaussagen ist es erforderlich, einige bekannte Aussagen aus der Literatur zu Hilfe zu nehmen. Der Vollständigkeit halber werden diese nachfolgend aufgeführt.

IV.17 Verallgemeinertes Banach-Lemma

Es seien X, Z Banachräume, T_1, $T_2 \in L(X,Z)$.

Es gelte:

(V1) T_1 besitzt eine koniare Inverse $T_1^{-1} : Z \to X$

(V2) Es existiert ein $q \in (0,1)$ mit $\|T_1^{-1}(T_2 - T_1)\| \leq q$

(B1) Dann besitzt auch T_2 eine koniare Inverse und es gilt

(4.25) $\|T_2^{-1} - T_1^{-1}\| \leq \frac{q}{1-q} \|T_1^{-1}\|$ sowie

(4.26) $\|T_2^{-1}\| \leq \frac{1}{1-q} \|T_1^{-1}\|$

Beweis:

Siehe etwa LJUSTERNIK - SOBOLEW [37], Satz 3, Seite 108 bezüglich (4.25) und KANTOROWITSCH - AKILOW [26], Satz 4, Seite 140 wegen (4.26).

IV.18 Satz über implizite Funktionen

Es seien X, Y, Z Banachräume, D_1, D_2 nichtleere offene Mengen mit $D_1 \subset X$, $D_2 \subset Y$ und $(x_o,y_o) \in D_1 \times D_2$.

$G : D_1 \times D_2 \to Z$ sei eine Abbildung mit den Eigenschaften:

(V1) $G(x_o,y_o) = 0$

(V2) G ist in einer Umgebung (x_o,y_o) stetig Fréchet-differenzierbar

(V3) Es existiert $G_x^{-1}(x_o,y_o)$

Dann gilt:

(B1) Es gibt positive Konstanten δ und ε mit $S(y_o,\delta) \subset D_2$ und $S(x_o,\varepsilon) \subset D_1$ sowie eine eindeutig bestimmte Abbildung $\varphi : S(y_o,\delta) \to S(x_o,\varepsilon)$ mit

(4.27) $\forall (x,y) \in S(x_o,\varepsilon) \times S(y_o,\delta) : \quad \varphi(y) = x \iff G(x,y) = 0.$

(B2) Die Abbildung φ ist auf $S(y_o,\delta)$ stetig Fréchet-differenzierbar und es gilt:

(4.28) $\varphi(y_o) = x_o$ sowie

(4.29) $G_x(\varphi(y),y)\,\varphi'(y) + G_y(\varphi(y),y) = 0$

Beweis:

Siehe LJUSTERNIK - SOBOLEW [37] (Kapitel VIII, § 8, Satz 1 und Satz 2)

IV.19 Satz von Hadamard

Es seien X, Z Banachräume, $\beta \in \mathbb{R}_+$, $\varphi : X \to Z$.

Es gelte

(V1) φ ist auf X stetig Fréchet-differenzierbar

(V2) $\forall\, x \in X\ \exists\, \varphi'(x)^{-1} \in L(Z,X)$ mit $\|\varphi'(x)^{-1}\| \leq \beta$

(B1) Dann gilt :
φ ist ein Homöomorphismus von X auf Z

Beweis:

Siehe SCHWARTZ [47], Theorem 1.22.

Die in dieser Arbeit betrachteten Einbettungsverfahren verwenden zur näherungsweisen Lösung der lokalen Gleichung $H(x,\lambda_i) = 0$ $(i \in \mathbb{N})$ ausnahmslos gedämpfte oder ungedämpfte Newton-ähnliche Iterationsschritte und gehen in der Regel in das Newton-Verfahren bzw. in ein Newton-ähnliches Verfahren für die Funktion F selbst über. Sie sind deshalb als Erweiterung bzw. Verallgemeinerung des Newton-Verfahrens anzusehen, die unter dem Aspekt der Ausweitung des Konvergenzbereiches bzw. der Verbesserung des Konvergenzverhaltens vorgenommen werden.

Der folgende Satz über das Newton-Verfahren dient zur Fehlerabschätzung in der Nähe der Lösung von $F(x) = 0$ für den Fall, daß das Einbettungsverfahren in das Newton-Verfahren übergeht und zum Vergleich mit den Voraussetzungen der Existenz- und Konvergenzsätze für die Einbettungsverfahren.

IV.20 Satz über das Newton-Verfahren

Es seien X, Z Banachräume, $\emptyset \neq D \subset X$, $F : D \to Z$, $x_o \in D$.

Es existiere die koniare Inverse $F'^{-1}(x_o)$ von $F'(x_o)$.

Mit den positiven Konstanten ζ, β, K, r seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

(V0) $\overline{S}(x_o,r) \subset D$

(V1) $\|F'^{-1}(x_o)F(x_o)\| \leq \zeta$

(V2) $\|F'^{-1}(x_o)\| \leq \beta$

(V3) $\forall\, x, y \in \overline{S}(x_o,r) : \|F'(x) - F'(y)\| \leq K \|x - y\|$

(V4) $h := \zeta\beta K \leq \frac{1}{2}$

(V5) $\frac{1 - \sqrt{1-2h}}{h}\zeta \leq r$

Dann gilt:

(B1) Das Newtonverfahren $x_{i+1} := x_i - F'^{-1}(x_i)\, F(x_i)$ definiert ausgehend von x_o eine Folge x_i ($i \in \mathbb{N}$) in $\overline{S}(x_o,r_-)$ mit

$r_- := (1 - \sqrt{1-2h})\, \frac{\zeta}{h} \leq 2\zeta$.

(B2) Diese Folge konvergiert gegen eine Nullstelle x* von F.

(B3) x* liegt in $\overline{S}(x_o,r_-)$ und ist einzige Nullstelle von F in $\overline{S}(x_o,r_+) \cap D$ mit $r_+ := (1 + \sqrt{1-2h})\, \frac{\zeta}{h} \geq 2\zeta$, falls $r < r_+$ für $h < \frac{1}{2}$ bzw. $r = r_+$ für $h = \frac{1}{2}$.

(B4) Für $i \in \mathbb{N}$ gilt die a-priori Fehlerabschätzung:

$$\|x^* - x_i\| \leq \frac{2\sqrt{1-h}}{h}\, \frac{\Theta^{2^i}}{1-\Theta^{2^i}} \qquad \text{mit } \Theta := \frac{1-\sqrt{1-2h}}{1+\sqrt{1-2h}} .$$

(B5) Für $i \in \mathbb{N}$ gilt die a-posteriori Fehlerabschätzung:

$\|x^* - x_i\| \leq \Theta_{i-1}\, \zeta_{i-1}^2$, wobei

$\Theta_o := \Theta$, $\zeta_o := \zeta$, $\beta_o := \beta$, $h_o := h$ und für $i \geq 2$

$$\Theta_{i-1} := \frac{1-\sqrt{1-2h_{i-1}}}{1+\sqrt{1-2h_{i-1}}} = \frac{1-h_{i-1}-\sqrt{1-2h_{i-1}}}{h_{i-1}}$$

$$h_{i-1} := \zeta_{i-1}\,\beta_{i-1}\,K \leq \frac{1}{2}\left(\frac{h_{i-2}}{1-h_{i-2}}\right)^2$$

$$\zeta_{i-1} := \|x_i - x_{i-1}\|$$

$$\beta_{i-1} := \frac{\beta_{i-2}}{1-h_{i-2}} \geq \|F'^{-1}(x_{i-1})\|$$

Beweis:

Der Beweis findet sich im wesentlichen bei KANTOROWITSCH - AKILOW [26], Satz 6, Seite 572. Die a-priori Fehlerabschätzung wurde von GRAGG - TAPIA in [23] angegeben, während die a-posteriori Fehlerabschätzung von DÖRING in [17] hergeleitet wurde.

IV.21 Bemerkung

Für die Anwendung von Satz IV.20 bei der numerischen Durchführung des Newton-Verfahrens empfiehlt sich die Wahl von $r := 2\zeta$. Hierfür folgt nämlich die Voraussetzung (V5) von Satz IV.20 stets aus Voraussetzung (V4), so daß (V5) nicht verfiziert zu werden braucht. Außerdem sind die in (B3) von Satz IV.20 benötigten Ungleichungen bei Anwendbarkeit des Satzes für dieses r stets erfüllt.

V. EXISTENZAUSSAGEN ÜBER LÖSUNGEN VON EINBETTUNGEN

V.1 Satz

Gegeben sei eine Einbettung $H : D \times J \to Z$ für F bezüglich $x_o \in D$.
Es sei $\gamma \in \mathbb{R}_+$.

Es gelte:

(V1) $M(H,x_o,0)$ ist abgeschlossen

(V2) H ist auf $M(H,x_o,0)$ regulär

(V3) $\forall\ (x,\lambda) \in M(H,x_o,0) : \quad \|H_\lambda(x,\lambda)\| \leq \gamma$

(B1) Dann gilt:
Es existiert eine eindeutig bestimmte, stetig Fréchet-differenzierbare Funktion $x : [0,1] \to D$ mit den Eigenschaften:

(5.1) $x(0) = x_o$

(5.2) $\forall\ \lambda \in [0,1] : \quad H(x(\lambda),\lambda) = 0$

(5.3) $\forall\ \lambda \in [0,1] : \quad x'(\lambda) = - H_x^{-1}(x(\lambda),\lambda)\ H_\lambda(x(\lambda),\lambda)$

Beweis:

Zunächst wird auf H an der Stelle $(x_o,0)$ der Satz über implizite Funktionen (Satz IV.18) angewendet:

Per Definition liegt $(x_o,0)$ in $M(H,x_o,0)$ mit $\|H(x_o,0)\| = 0$, so daß (V1) aus Satz IV.18 erfüllt ist.

Wegen der Regularität von H auf $M(H,x_o,0)$ folgt aus (4.12) die Existenz einer offenen Umgebung U_o von $(x_o,0)$ auf der H stetig Fréchet-differenzierbar ist, womit (V2) aus Satz IV.18 gilt.

(V3) aus Satz IV.18 folgt ebenfalls wegen der Regularität von H aus (4.13).

Damit gilt:

Es existieren positive Konstanten δ und ε mit $[0,\delta) \subset J$, $S(x_o,\varepsilon) \subset D$ sowie eine eindeutig bestimmte stetig Fréchet-differenzierbare Abbildung $x : [0,\delta) \to S(x_o,\varepsilon) \subset D$ mit

(5.4) $x(0) = x_o$

(5.5) $\forall\ \lambda \in [0,\delta) :\quad H(x(\lambda),\lambda) = 0$

(5.6) $\forall\ \lambda \in [0,\delta) :\quad x(\lambda)$ ist einzige Lösung von $H(x,\lambda) = 0$ in $S(x_o,\varepsilon)$

(5.7) $\forall\ \lambda \in [0,\delta) :\quad H_x(x(\lambda),\lambda)\ x'(\lambda) + H_\lambda(x(\lambda),\lambda) = 0.$

Wegen der Stetigkeit von x und (5.5) folgt dann, daß

(5.8) $\forall\ \lambda \in [0,\delta) :\quad (x(\lambda),\lambda) \in M(H,x_o,0).$

Mit der Regularität von H auf $M(H,x_o,0)$ ergibt sich hieraus die Invertierbarkeit von $H_x(x(\lambda),\lambda)$ für alle $\lambda \in [0,\delta)$, so daß (5.7) äquivalent ist zu

(5.9) $\forall\ \lambda \in [0,\delta) :\quad x'(\lambda) = - H_x^{-1}(x(\lambda),\lambda)\ H_\lambda(x(\lambda),\lambda).$

Für $\lambda_o,\lambda_1 \in [0,\delta)$ gilt mit (5.9) :

$$x(\lambda_1) - x(\lambda_o) \underset{(*)}{=} \int_{\lambda_o}^{\lambda_1} x'(t)\ dt = \int_{\lambda_o}^{\lambda_1} - H_x^{-1}(x(t),t)\ H_t(x(t),t)\ dt,$$

so daß

$$\|x(\lambda_1) - x(\lambda_o)\| = \left\| \int_{\lambda_o}^{\lambda_1} - H_x^{-1}(x(t),t)\ H_t(x(t),t)\ dt \right\|$$

$$\underset{(+)}{\leq} \int_{\lambda_o}^{\lambda_1} \|H_x^{-1}(x(t),t)\| \|H_t(x(t),t)\|\ dt.$$

Zusammen mit (V2) und (V3) impliziert dies

(5.10) $\forall\ \lambda_o,\lambda_1 \in [0,\delta) :\quad \|x(\lambda_1) - x(\lambda_o)\| \leq \beta\ \gamma\ |\lambda_1 - \lambda_o|$

mit der Regularitätskonstanten β nach (4.13) und der Konstanten γ aus (V3).

Also ist x auf $[0,\delta)$ Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten $\beta\gamma$.

(*) Bezüglich der Integration von Abbildungen eines Intervalls in einen Banachraum siehe etwa DIEUDONNÉ [16], Kapitel 8.7 .

(+) Die Gültigkeit dieser Abschätzung ist z.B. bei DIEUDONNÉ [16], 8.7.7 (Seite 168) nachgewiesen, da die Funktion x'(t) stetig und damit nach [16], 7.6.2 (Seite 147) einfach ist.

Sei nun $\{ \lambda_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ eine beliebige Folge aus $[0,\delta)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \delta$.

Dann bildet $\{ \lambda_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ eine Cauchy-Folge, so daß gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_o \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_o,\ k \in \mathbb{N}: \quad |\lambda_n - \lambda_{n+k}| \leq \frac{\varepsilon}{\beta\ \gamma} \ .$$

Hieraus folgt mit (5.10):

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_o \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_o,\ k \in \mathbb{N}:$$

$$\|x(\lambda_n) - x(\lambda_{n+k})\| \leq \beta\ \gamma\ |\lambda_n - \lambda_{n+k}| \leq \varepsilon \ .$$

Das bedeutet, daß auch $\{ x(\lambda_n) \mid n \in \mathbb{N} \}$ eine Cauchy-Folge (in X) darstellt. Da X ein Banachraum ist, existiert infolgedessen

$$x(\delta) := \lim_{n\to\infty} x(\lambda_n) \ .$$

$x(\delta)$ ist unabhängig von der Wahl der Folge $\{ \lambda_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ eindeutig bestimmt.

Sind nämlich $\{ \lambda_n^1 \mid n \in \mathbb{N} \}$ und $\{ \lambda_n^2 \mid n \in \mathbb{N} \}$ zwei Folgen aus

$[0,\delta)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n^1 = \delta$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n^2 = \delta$ sowie

$$x^1(\delta) := \lim_{n\to\infty} x(\lambda_n^1) \quad \text{und} \quad x^2(\delta) := \lim_{n\to\infty} x(\lambda_n^2) \ ,$$

so gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$:

(5.11) $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_1: \quad \|x^1(\delta) - x(\lambda_n^1)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

(5.12) $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_2: \quad \|x^2(\delta) - x(\lambda_n^2)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

(5.13) $\exists\, n_3 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_3: \quad |\delta - \lambda_n^1| \leq \frac{\varepsilon}{6\ \beta\ \gamma}$ und

$\exists\, n_4 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_4: \quad |\delta - \lambda_n^2| \leq \frac{\varepsilon}{6\ \beta\ \gamma}$.

Für $n_5 := \max \{ n_3, n_4 \}$ gilt mit (5.10) und (5.13):

(5.14) $\forall\, n \geq n_5:$

$$\begin{aligned} \|x(\lambda_n^1) - x(\lambda_n^2)\| &\leq \beta\ \gamma\ \|\lambda_n^1 - \lambda_n^2\| \\ &\leq \beta\ \gamma\ (\|\lambda_n^1 - \delta\| + \|\delta - \lambda_n^2\|) \\ &\leq \beta\ \gamma\ \left(\frac{\varepsilon}{6\ \beta\ \gamma} + \frac{\varepsilon}{6\ \beta\ \gamma} \right) = \frac{\varepsilon}{3} \ . \end{aligned}$$

Wählt man nun $n_6 := \max \{ n_1, n_2, n_5 \}$ und $n \geq n_6$, so folgt wegen (5.11), (5.12) und (5.14):

$$\|x^1(\delta) - x^2(\delta)\| \leq \|x^1(\delta) - x(\lambda_n^1)\| + \|x(\lambda_n^1) - x(\lambda_n^2)\| + \|x(\lambda_n^2) - x^2(\delta)\| \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig zugelassen war, muß somit $x^1(\delta) = x^2(\delta)$ gelten. Die Funktion x läßt sich also eindeutig stetig auf $[0,\delta]$ fortsetzen. Wegen der Stetigkeit von H gilt auch $H(x(\delta),\delta) = 0$ und infolge von (V1) liegt auch $(x(\delta),\delta)$ in $M(H,x_0,0)$.

Der Satz über implizite Funktionen kann deshalb auf $(x(\delta),\delta)$ erneut angewendet werden. Hieraus kann dann gefolgert werden, daß die stetige Fortsetzung auf $x(\delta)$ sogar stetig Fréchet-differenzierbar ist. Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes kann nun auf die eindeutige Existenz einer auf dem ganzen Intervall $[0,1]$ definierten Funktion x mit den in (B1) angegebenen Eigenschaften geschlossen werden. Ist nämlich

$\overline{\delta} := \sup \{ \delta \in J \mid \exists\, x : [0,\delta] \to D$ eindeutig bestimmt mit den in (B1) angegebenen Eigenschaften $\}$,

so folgt die Existenz einer eindeutig bestimmten Fréchet-differenzierbaren Funktion x mit den in (B1) genannten Eigenschaften auf dem Intervall $[0,\overline{\delta})$. Mit der oben angeführten Schlußweise läßt sich x dann wieder mit den erforderlichen Eigenschaften auf $[0,\delta]$ fortsetzen, so daß $\overline{\delta}$ als Maximum angenommen wird. Ist nun $\overline{\delta} < 1$, so kann x mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen auch über $\overline{\delta}$ hinaus fortgesetzt werden, was im Widerspruch zur Definition von $\overline{\delta}$ steht. Also muß $\overline{\delta} \geq 1$ gelten, woraus die Gültigkeit von (B1) folgt. ▲

V.2 Bemerkung

Ist H eine Einbettung für F bezüglich x_0 und $0 \leq c_1 \leq c_2 \in \mathbb{R}$, dann folgt aus Definition IV.6 sofort, daß $M(H,x_0,c_1) \subset M(H,x_0,c_2)$. Ist ferner H auf $M(H,x_0,c_2)$ stetig und $M(H,x_0,c_2)$ abgeschlossen, so ist auch $M(H,x_0,c_1)$ abgeschlossen. Betrachtet man nämlich eine Cauchy-Folge $\{ (x_i,\lambda_i) \mid i \in \mathbb{N} \}$ in $M(H,x_0,c_1)$ so ist diese gleichzeitig eine Cauchy-Folge in $M(H,x_0,c_2)$ mit $\forall\, i \in \mathbb{N} : \|H(x_i,\lambda_i)\| \leq c_1$. In $M(H,x_0,c_2)$ existiert dann wegen der Abgeschlossenheit der Grenzwert

$$(x^*,\lambda^*) := \lim_{i\to\infty} (x_i,\lambda_i)$$

und da H bei (x^*,λ^*) stetig ist, gilt $\|H(x^*,\lambda^*)\| \leq c_1$, so daß (x^*,λ^*) auch in $M(H,x_0,c_1)$ liegen muß.

Deshalb gilt:

V.3 Korollar

Gegeben sei eine Einbettung $H : D \times J \to Z$ für F bezüglich $x_0 \in D$.

Es seien γ, $c \in \mathbb{R}_+^o$.

Es gelte :

(V1) $M(H,x_o,c)$ ist abgeschlossen

(V2) H ist auf $M(H,x_o,c)$ regulär

(V3) $\forall\ (x,\lambda) \in M(H,x_o,c) : \quad \|H_\lambda(x,\lambda)\| \leq \gamma$

Dann gilt (B1) aus Satz V.1 .

V.4 Bemerkung

(V1) aus Satz V.1 sichert ab, daß die Lösungskurve x der Einbettung H den Definitionsbereich D von F nicht verläßt. Für den Fall, daß F auf dem ganzen Banachraum X und damit H auf $X \times J$ definiert ist, ist Voraussetzung (V1) aus Satz V.1 trivialerweise für jede stetige Einbettung H und jedes $c \in \mathbb{R}_+$ erfüllt, so daß sie in diesem Falle nicht erforderlich ist. D.h. es gilt:

V.5 Korollar

Es sei $H : X \times J \to Z$ eine stetige Einbettung für F bezüglich x_o und $\gamma \in \mathbb{R}_+^o$.

Es gelte:

(V2) H ist auf $M(H,x_o,0)$ regulär

(V3) $\forall\ (x,\lambda) \in M(H,x_o,0) : \quad \|H_\lambda(x,\lambda)\| \leq \gamma$

Dann gilt (B1) aus Satz V.1 .

V.6 Bemerkung

Voraussetzung (V3) in Satz V.1 bzw. Korollar V.5 sichert ab, daß die auf einem Intervall $[0,\delta)$ definierte Lösung von H dort Lipschitz-stetig ist (vergl. (5.10)), so daß auf die eindeutige Existenz einer stetigen Fortsetzung der Funktion x durch $x(\delta)$ mit $H(x(\delta),\delta) = 0$ geschlossen werden kann. Falls nun F auf dem ganzen Banachraum X und dementsprechend H auf $X \times J$ definiert ist, so ist diese Schlußweise für die Existenz einer eindeutigen Lösung x von H nicht erforderlich, wenn an Stelle von (V2) gefordert wird:

(V2)' H ist auf $X \times [0,1]$ regulär .

In diesem Fall kann nämlich ohne die Verwendung von (V3) für jedes $\lambda \in [0,1]$ die Existenz einer in X eindeutig bestimmten Lösung $x(\lambda)$ von $H(x,\lambda) = 0$ mit Hilfe des Satzes von Hadamard (Satz IV.19) gesichert werden. Hierzu ist für festes $\lambda \in [0,1]$ jeweils $\varphi_\lambda : X \to Z$ vermöge $\forall\, x \in X : \quad \varphi_\lambda(x) := H(x,\lambda)$ zu betrachten.
Wegen der Regularität von H auf $X \times [0,1]$ gilt dann:
φ_λ ist auf X stetig Fréchet-differenzierbar (mit $\varphi_\lambda'(x_0) = H_x(x_0,\lambda)$) sowie:
$\forall\, x \in X$ existiert $\varphi_\lambda'(x)^{-1} = H_x^{-1}(x,\lambda)$ mit $\|\varphi_\lambda'(x)^{-1}\| \leq \beta$.
Das bedeutet, daß für φ_λ die Voraussetzungen (V1) und (V2) von Satz IV.19 erfüllt sind und folglich φ_λ ein Homöomorphismus von X auf Z ist. Deshalb existiert zu λ ein in X eindeutig bestimmtes $x(\lambda)$ mit $\varphi_\lambda(x(\lambda)) = H(x(\lambda),\lambda) = 0$.

Durch die Zuordnung $\lambda \longmapsto x(\lambda)$ wird somit auf $[0,1]$ eindeutig eine Funktion x mit den Eigenschaften (5.1) und (5.2) festgelegt, für die die Differenzierbarkeitseigenschaften sowie (5.3) wie im Beweis von Satz V.1 mit dem Satz über implizite Funktionen hergeleitet werden können.

Bei Gültigkeit von (V2)' gilt damit insbesondere:

$$M(H,x_0,0) = \{\, (x(\lambda),\lambda) \mid \lambda \in [0,1] \,\}\ ,$$

und als stetiges Bild des kompakten Intervalls $[0,1]$ ist $M(H,x_0,0)$ dann kompakt. Die stetige Funktion H_λ ist deshalb auf $M(H,x_0,0)$ beschränkt, so daß sich (V3) als Folgerung von (V2)' ergibt.

Es gilt also:

V.7 Korollar

Gegeben sei eine Einbettung $H : X \times J \to Z$ für F bezüglich x_0

Es gelte:

(V2)' H ist auf $X \times [0,1]$ regulär

Dann gilt (B1) von Satz V.1 .

V.8 Vergleich mit anderen Existenzaussagen aus der Literatur

V.8.1

FEILMEIER - LORY - SCHEURING - WACKER betrachten in [19], Satz 2.2.1 eine Einbettung H auf $X \times J$.

Gefordert wird dort auf ganz $X \times J$:

a) zweimalige stetige Fréchet-Differenzierbarkeit von H
b) Beschränktheit von $\|H''(x,\lambda)\|$
c) Beschränktheit von $\|H_\lambda(x,\lambda)\|$
d) Existenz von $H_x^{-1}(x,\lambda)$
e) Beschränktheit von $\|H_x^{-1}(x,\lambda)\|$

Dann folgt die Existenz einer stetigen Lösung x von H und die Durchführbarkeit eines dort angegebenen Stufenverfahrens. (Der Durchführbarkeitsbegriff ist dabei nicht mit der Definition der Ausführbarkeit nach IV.8 identisch.)

Die Aussage dieses Satzes ist zwar gegenüber Satz V.1 sowie den angegebenen Korollaren um die Durchführbarkeit des Verfahrens erweitert, jedoch werden schon im Beweis für die Existenz der stetigen Lösung x alle Voraussetzungen a) bis e) verwendet.

In Bezug auf die Existenzaussage hätten die Voraussetzungen auf zweifache Weise abgeschwächt werden können.

Zum einen wäre es hierfür ausreichend gewesen, auf $X \times J$ zu fordern:

a)' stetige Fréchet-Differenzierbarkeit von H
d) Existenz von $H_x^{-1}(x,\lambda)$
e) Beschränktheit von $\|H_x^{-1}(x,\lambda)\|$

denn dann gilt die Regularität von H auf $X \times [0,1]$ und damit nach Korollar V.7 auch (B1) von Satz V.1

Zum anderen hätte es genügt, (V2) und (V3) von Korollar V.3 zu fordern, was bedeutet, daß:

statt a) nur die stetige Fréchet-Differenzierbarkeit auf einer offenen Umgebung U von $M(H,x_o,0)$ benötigt wird, b) entfallen kann und die Existenz von $H_x^{-1}(x,\lambda)$ in d) sowie die Beschränktheit von $\|H_\lambda(x,\lambda)\|$

in c) bzw. von $\|H_x^{-1}(x,\lambda)\|$ in e) nur auf $M(H,x_o,0)$ gelten muß.

V.8.2

SCHWETLICK betrachtet in [48], Satz 2.2 Einbettungen H auf $\mathbb{R}^n \times J$.

Gefordert wird auf ganz $\mathbb{R}^n \times J$:

Regularität für H

Dann folgt die Aussage (B1) aus Satz V.1.

Da $\mathbb{R}^n$ ein Banachraum ist und $\mathbb{R}^n \times [0,1] \subset \mathbb{R}^n \times J$ gilt, ist dieser Satz in Korollar V.7 enthalten.

V.8.3

Bei geeigneten Differenzierbarkeitseigenschaften der Einbettungsfunktion H ist die Existenz einer stetig Fréchet-differenzierbaren Lösung von H äquivalent zur Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems:

$$\forall\, \lambda \in [0,1]: \quad x'(\lambda) = -H_x^{-1}(x(\lambda),\lambda)\, H_\lambda(x(\lambda),\lambda)$$
$$x(0) = x_o .$$

Infolgedessen können Existenzsätze für Lösungen von Anfangswertproblemen zum Nachweis der Existenz von Lösungen für Einbettungen herangezogen werden.

Diesen Weg beschreitet z.B. MEYER in [40].

Für $D \subset \mathbb{R}^n$ werden hier auf $D \times [0,1]$ Einbettungen der Form

(5.15) $\forall\, (x,\lambda) \in D \times [0,1]: \quad H(x,\lambda) = g(\lambda)\, F(x) + h(\lambda)\, G(x)$

betrachtet, wobei F auf D eine lokal Lipschitz-stetige Fréchet-Ableitung F_x besitzen soll und $g, h : [0,1] \to \mathbb{R}$ sowie $G : D \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig Fréchet-differenzierbar gewählt sind.

Gefordert wird für H:

a) $x_o \in D$ mit $H(x_o,0) = 0$

b) $H_x(x,\lambda)$ ist auf $D \times [0,1]$ invertierbar

c) Es existiert eine stetige Funktion $\tilde{h} : [0,1] \times \mathbb{R}_+^o \to \mathbb{R}_+^o$, so daß $\tilde{h}(\lambda,.)$ für festes $\lambda \in [0,1]$ auf $\mathbb{R}_+^o$ monoton nicht fallend ist und

(5.16) $\forall\, (x,\lambda) \in D \times [0,1]: \quad \|H_x^{-1}(x,\lambda)\, H_\lambda(x,\lambda)\| \leq \tilde{h}(\lambda, \|x-x_o\|)$ gilt.

d) Die maximale Lösung r^* des Cauchyschen Anfangswertproblems

(5.17) $\forall\ \lambda \in [0,1]: \quad r'(\lambda) = \tilde{h}(\lambda, r(\lambda)), \quad r(0) = 0$

ist so beschränkt, daß $\overline{S}(x_0, r^*(1)) \subset D$.

Dann folgt die Existenz einer Lösung x von H auf $[0,1]$.

Diese Aussage ist nicht direkt mit Satz V.1 oder einem der Korollare vergleichbar, was durch die Verwendung prinzipiell anderer theoretischer Hilfsmittel begründet ist. Der Vollständigkeit halber sollte jedoch auch diese Möglichkeit der Gewinnung von Existenzaussagen angeführt werden, die ihrem Wesen nach mehr der in Kapitel I angesprochenen Nullstellenbestimmung mit Hilfe der Differentialgleichungsmethode zugeordnet ist.

Eine gewisse Parallelität zwischen den Voraussetzungen von Satz V.1 und denjenigen der obigen Aussage von MEYER läßt sich aber dennoch feststellen.

Beidesmal ist die beschränkte Integrierbarkeit von $\|H_x^{-1}(x(\lambda),\lambda)H_\lambda(x(\lambda),\lambda)\|$ auf dem Intervall $[0,1]$ abzusichern. In Satz V.1 geschieht dies wegen (V2) und (V3) für die in Betracht kommenden λ über die Beschränktheit von $\|H_x^{-1}(x(\lambda),\lambda)\|$ durch β und von $\|H_\lambda(x(\lambda),\lambda)\|$ durch γ, bei MEYER nach (c) und (d) über die Abschätzung von $\|H_x^{-1}(x,\lambda)H_\lambda(x,\lambda)\|$ durch die beschränkt integrierbare Funktion $\tilde{h}$.

Daneben ist beidesmal abzusichern, daß die erzeugte Lösung x in den Definitionsbereich D von F abbildet. Bei MEYER geschieht dies durch die Forderung, daß $\overline{S}(x_0, r^*(1)) \subset D$, während hierzu in Satz V.1 die in (V1) geforderte Abgeschlossenheit von $M(H, x_0, 0)$ dient.

Die Fréchet-Differenzierbarkeit von H sowie die Invertierbarkeit von H_x ist in beiden Sätzen erforderlich. Allerdings müssen diese Eigenschaften in Satz V.1 nicht wie bei MEYER auf ganz $D \times [0,1]$, sondern auf der Teilmenge $M(H, x_0, 0)$ bzw. einer offenen Umgebung hiervon vorliegen.

VI. DEFINITION DER EINBETTUNGSVERFAHREN EV1 UND EV2

Es wird zunächst ein Einbettungsverfahren EV1 unter Verwendung einer Einbettungsfamilie $\tilde{H} : D \times D \times J \to Z$ definiert. Dabei sollen prinzipiell die folgenden Verfahrensgleichungen verwendet werden:

(6.1) $\lambda_{i+1} := \lambda_i + \Delta\lambda_i$

(6.2) $x_{i+1} := x_i - \omega_i \Gamma_i \tilde{H}(x_i, x_i, \lambda_{i+1})$

mit $i \in \mathbb{N}_o$, $x_i \in D$, $\lambda_{i+1} \in [0,1]$, $\omega_i \in \mathbb{R}_+$, einer geeigneten Näherung Γ_i für $\tilde{H}_x^{-1}(x_i, x_i, \lambda_{i+1})$, sowie $\lambda_o := 0$.

Eine Auswertung der Gleichung (6.2) besteht demnach aus einem durch ω_i "gedämpften" Schritt eines Newton-ähnlichen Verfahrens, angewendet auf $\tilde{H}$ an einer Stelle $(x_i, x_i, \lambda_{i+1})$.

Zur Durchführung von (6.1) und (6.2) sind in jedem Schritt die Verfahrensparameter $\Delta\lambda_i$ und ω_i, sowie die Abbildung Γ_i so geeignet zu wählen, daß die Ausführbarkeit des Verfahrens gesichert ist und somit Konvergenz der x_i gegen ein $x^* \in D$ erzeugt wird mit $F(x^*) = 0$. Für die Bestimmung der Größen Γ_i und ω_i in (6.2) soll die Eigenschaft der "Defektreduzierung" gedämpfter Newton-ähnlicher Verfahren maßgeblich sein.

Bekanntlich reduziert sich die Norm der Funktionswerte einer Abbildung lokal in einer geeignet genäherten "Newton-Richtung", so daß unter gewissen Voraussetzungen für $q < 1$ durch (6.2) ein x_{i+1} mit

(6.3) $\|\tilde{H}(x_{i+1}, x_i, \lambda_{i+1})\| \leq q \|\tilde{H}(x_i, x_i, \lambda_{i+1})\|$

erzeugt werden kann.

Zur Bestimmung von x_{i+1} nach (6.2) muß zuvor λ_{i+1} ausgehend von λ_i gemäß (6.1) geeignet festgelegt werden. Da das Ziel von Einbettungsverfahren darin besteht, ausgehend von $\lambda_o = 0$ mit möglichst wenig Aufwand zu $\lambda = 1$ zu gelangen, wird man bestrebt sein, $\Delta\lambda_i$ in (6.1) so groß wie eben möglich zu wählen. Allerdings muß die Wahl von $\Delta\lambda_i$ so erfolgen, daß für λ_{i+1} die in (6.2) erforderlichen Größen wohldefiniert sind und (6.3) möglich bleibt.

Ein Verfahren, das die Verfahrensgleichungen (6.1) und (6.2) verwendet

und die Verfahrensgrößen so steuert, daß jeweils für $i \in \mathbb{N}_o$ die Gültigkeit von (6.3) erreicht wird, kann sicher nicht mit jeder beliebigen Einbettungsfamilie $\tilde{H}$ erfolgreich durchgeführt werden. Deshalb muß das Verfahren auf bestimmte Klassen von Einbettungsfamilien beschränkt werden, für die unter gewissen Voraussetzungen die Ausführbarkeit abgesichert werden kann. In diesem Zusammenhang sind die bereits in (2.3) erwähnten Einbettungsfamilien $\tilde{H}$ hilfreich, durch die ein Zusammenhang zwischen Einbettungen H und Einbettungsfamilien $\tilde{H}$ hergestellt wird.

Sei H eine Einbettung für F. Dann bildet $\tilde{H} : D \times D \times J \to Z$ vermöge

(6.4) $\quad \tilde{H}(x,y,\lambda) := H(x,\lambda) - (1-\lambda)\, H(y,\lambda)$

eine Einbettungsfamilie für F. Es gilt nämlich (4.3), weil

$\forall\, x \in D : \quad \tilde{H}(x,x,0) = H(x,0) - H(x,0) = 0$ und (4.4), da

$\forall\, x, y \in D : \quad \tilde{H}(x,y,1) = H(x,1) = F(x).$

Für Einbettungsfamilien $\tilde{H}$ dieser Form läßt sich unter geeigneten Voraussetzungen aus (6.3) auch noch eine entsprechende Normreduktion für die zugehörige Einbettung H folgern, d.h. aus (6.3) folgt dann für H:

(6.5) $\quad \|H(x_{i+1},\lambda_{i+1})\| \leq \alpha_i \, \|H(x_i,\lambda_{i+1})\|$

mit $\alpha_i := 1 - (1-q)\,\mu_i$ und $\mu_i \in (0,1]$.

Außerdem können die zur Konvergenzsicherung für (6.1) und (6.2) erforderlichen Voraussetzungen an $\tilde{H}$ für Einbettungsfamilien der Form (6.4) auf Forderungen an die zugehörige Einbettung H zurückgeführt werden.

Für Einbettungsfamilien nach (6.4) gilt:

(6.6) a) $\quad \tilde{H}(x_i,x_i,\lambda_{i+1}) = \lambda_{i+1}\, H(x_i,\lambda_{i+1})$

b) $\quad \tilde{H}_x(x_i,x_i,\lambda_{i+1}) = H_x(x_i,\lambda_{i+1})$,

so daß hierfür Gleichung (6.2) übergeht in

(6.7) $\quad x_{i+1} := x_i - \omega_i\, \lambda_{i+1}\, \Gamma_i\, H(x_i,\lambda_{i+1})$

mit $i \in \mathbb{N}_o$, $x_i \in D$, $\lambda_{i+1} \in [0,1]$, $\omega_i \in \mathbb{R}_+$ und einer Näherung Γ_i für $H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})$.

Setzt man hierin $\omega_i \lambda_{i+1} =: \mu_i$, so erhält man schließlich:

(6.8) $\quad x_{i+1} := x_i - \mu_i \Gamma_i H(x_i,\lambda_{i+1})$,

wobei λ_{i+1} und μ_i so zu steuern sind, daß (6.5) gilt und mit λ_{i+1} möglichst schnell der Wert 1 erreicht wird.

Um Ausführbarkeitsaussagen für Einbettungsverfahren machen zu können, ist es erforderlich, daß gewisse konvergenzsichernde Eigenschaften für alle erzeugten Iterierten erfüllt sind. Da man die Iterierten aber a-priori nicht kennt, ist es sinnvoll, die entsprechenden Eigenschaften auf einer geeigneten Menge zu fordern, von der man weiß, daß sie alle Iterierten enthält. Im allgemeinsten Falle ist dies der ganze betrachtete Raum. Unter Beachtung von (6.5) kann man unter bestimmten Voraussetzungen durch geeignete Wahl von λ_{i+1}, μ_i und Γ_i in (6.8) aber auch erreichen, daß das ganze Verfahren für ein $c > 0$ in der in IV.8 definierten Niveaumenge $M(H,x_o,c)$ abläuft. Dann müssen die Eigenschaften, die die Ausführbarkeit sichern, nur bezüglich $M(H,x_o,c)$ erfüllt sein. Um abzusichern, daß alle Iterierten wirklich in $M(H,x_o,c)$ liegen, ist in jedem Einbettungsschritt prinzipiell die folgende Vorgehensweise erforderlich:

Ausgehend von $(x_i,\lambda_i) \in M(H,x_o,c)$ mit $\|H(x_i,\lambda_i)\| < c$ wird $\Delta\lambda_i$ in (6.1) möglichst groß so gewählt, daß

$$\forall\, \lambda \in [\lambda_i,\lambda_{i+1}] : \quad (x_i,\lambda) \in D \times [0,1] \quad \text{und} \quad \|H(x_i,\lambda)\| \leq c.$$

Dann wird zu (x_i,λ_{i+1}) eine hinreichend gute Approximation Γ_i für $H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})$ bestimmt und ein $\mu_i \in (0,1]$ so festgelegt, daß mit x_{i+1} nach (6.8) die Eigenschaft (6.5) erfüllt ist. Wegen (6.5) entsteht dann erneut Spielraum zur weiteren Vergrößerung von λ_{i+1} zu λ_{i+2} etc. bis $\lambda = 1$ erreicht ist.

Formal läßt sich die obige Vorgehensweise wiefolgt beschreiben:

VI.1 Das Einbettungsverfahren EV1

Gegeben sei eine Einbettung H für F und eine Funktion
$K1 : D \times J \times X \times [0,1] \to \mathbb{R}_+^o$.

Schritt 0: Setze $i := 0$ und $\lambda_o := 0$.
Wähle $c, d, q, \rho \in \mathbb{R}$ mit $0 < c$, $0 \leq d < q < 1$ und $0 < \rho < 1$.

Schritt 1: Für $\delta \in [0,1-\lambda_i]$ setze

(6.9) $P(x_i,\lambda_i,\delta) := \{x_i\} \times [\lambda_i,\lambda_i+\delta] \cap M(H,x_o,c)$,

(6.10) $\gamma_i(\delta) := \max \{ \|H_\lambda(x_i,\lambda)\| \mid (x_i,\lambda) \in P(x_i,\lambda_i,\delta) \}$ und

(6.11) $Q(x_i,\lambda_i) := \{ \delta \in [0,1-\lambda_i] \mid \delta\, \gamma_i(\delta) \le c - \|H(x_i,\lambda_i)\| \}$.

Bestimme

(6.12) $\Delta\lambda_i := \max Q(x_i,\lambda_i)$

und setze $\lambda_{i+1} := \lambda_i + \Delta\lambda_i$.

Schritt 2: Wähle $\Gamma_i \in L(Z,X)$ mit

(6.13) $\|I - H_x(x_i,\lambda_{i+1})\,\Gamma_i\| \le d$

Schritt 3: Berechne $\Delta x_i := -\Gamma_i H(x_i,\lambda_{i+1})$, $\|\Delta x_i\|$ und $\|\Gamma_i\|$.

Für $\mu \in [0,1]$ setze

(6.14) $\eta_i(\mu) := \mu\, K1(x_i,\lambda_{i+1},\Delta x_i,\mu)\, \|\Gamma_i\| \|\Delta x_i\|$

und bestimme $\mu_i \in [0,1]$, so daß

(6.15) $\forall\, \mu \in [0,\mu_i] : \quad \eta_i(\mu) \le 2\,(q - d)$ und

(6.16) $\varphi\, 2\,(q - d) \le \eta_i(\mu_i)$ falls $\mu_i < 1$.

Setze $x_{i+1} := x_i + \mu_i \Delta x_i$, erhöhe i um 1 und

gehe zu Schritt 1.

VI.2 Bemerkungen

VI.2.1

Ist H eine affine Einbettung, so gilt nach (4.7)

$\forall\, (x,\lambda) \in D \times J : \quad H(x,\lambda) = H_o(x) + \lambda\,(F(x) - H_o(x))$.

Damit ist $H_\lambda(x,\lambda) = F(x) - H_o(x)$ konstant in λ.

Hierdurch vereinfacht sich Schritt 1 von EV1 wesentlich, denn es ist dann in (6.12):

$\Delta\lambda_i = 1 - \lambda_i$, falls $\|H_\lambda(x_i,\lambda_i)\| = 0$ und

$$\Delta\lambda_i = \min \left\{ 1 - \lambda_i\,,\ \frac{c - \|H(x_i,\lambda_i)\|}{\|H_\lambda(x_i,\lambda_i)\|} \right\} \quad \text{sonst.}$$

VI.2.2

Der Verlauf von EV1 hängt sehr wesentlich von der Wahl der Konstanten d, q, ρ und c ab.

Die Wahl von d bestimmt die Güte der erforderlichen Approximation Γ_i für $H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})$. Für $d > 0$ ist es nach (6.13) möglich statt der exakten Inversen geeignete Näherungen zu verwenden, die man sich z.B. iterativ etwa durch das SCHULZ - Verfahren (siehe [2]) oder durch Verwendung der BROYDEN - Korrektur (siehe [7]) verschaffen kann. Wie aus (6.15) ersichtlich, führt die Wahl eines größeren d zu kleineren Dämpfungsfaktoren μ_i. In Folge davon ergeben sich in (6.5) geringere Normreduktionen und folglich auch kleinere λ - Schrittweiten. Das bedeutet, daß ein größeres d in der Regel mehr Iterationsschritte erforderlich macht, als ein kleineres. Für die Größe von d sollte deshalb die Relation entscheidend sein, in der der Rechenaufwand zur Bestimmung von Γ_i zum Aufwand eines gesamten Iterationsschrittes steht. Ist $H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})$ relativ einfach zu ermitteln, so sollte man $d = 0$ wählen. Ist die Bestimmung von $H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})$ dagegen sehr aufwendig bzw. nur iterativ möglich, so ist ein positives, dem Aufwand angepaßtes d angebracht.

Die Wahl von q ist über (6.15) entscheidend für die mögliche Größe des Dämpfungsfaktors μ_i. Da die in (6.14) bei der Bestimmung von $\eta_i(\mu)$ eingehenden Größen in der Regel ohnehin nur abzuschätzen sind, ist es sinnvoll, q relativ nahe bei 1 zu wählen (z.B. $q = 0.99$), damit die Dämpfungsfaktoren nicht unnötig klein ausfallen.

Die Wahl von ρ ist entscheidend für die Bandbreite des Intervalls, in dem $\eta_i(\mu_i)$ liegen muß, falls $\mu_i < 1$ ist. (Die Beschränkung von $\eta_i(\mu_i)$ nach unten ist für diesen Fall erforderlich, um auszuschließen, daß die μ_i gegen 0 konvergieren.) Die Größe von ρ sollte am Aufwand für die Bestimmung von $\eta_i(\mu)$ ausgerichtet sein. Ist dieser Aufwand gering, so wählt man sinnvollerweise ρ relativ groß (z.B. $\rho = 0.99$) um auch den Dämpfungsfaktor μ_i groß zu halten. Ist der Aufwand zur Bestimmung von $\eta_i(\mu)$ dagegen erheblich, so kann durch die Wahl eines kleineren ρ (z.B. $\rho = 0.5$) insbesondere bei iterativer Bestimmung von μ_i (z.B. durch Bisektion) schneller ein akzeptabler Dämpfungsfaktor μ_i gefunden werden.

Die Wahl von c legt entscheidend den Bereich $M(H,x_o,c)$ fest, in dem das gesamte Einbettungsverfahren abläuft. Deshalb kann die Größe von c entscheidend für Erfolg oder Mißerfolg bei der Durchführung des Einbettungsverfahrens sein. Da $M(H,x_o,c)$ monoton wachsend von c abhängt, müssen die Bedingungen für die Ausführbarkeit des Verfahrens bei größerem c auf einer größeren Menge erfüllt sein. Bei wachsendem c nimmt insbesondere die Gefahr zu, daß das Verfahren auf eine Stelle trifft, an der H_x keine koniare Inverse besitzt. Da das Verfahren an einer solchen Stelle scheitert, besteht unter diesem Gesichtspunkt eine höhere Wahrscheinlichkeit für die erfolgreiche Anwendbarkeit des Verfahrens, je kleiner c gewählt wird. Andererseits bedeutet eine Verkleinerung von c aber eine Erhöhung des numerischen Aufwandes, weil bei kleinem c auch nur kleine λ - Schrittweiten möglich sind und somit bis zur Lösung mehr Schritte durchgeführt werden müssen. Optimal wäre deshalb ein möglichst großes c, für das auf $M(H,x_o,c)$ noch die Existenz einer koniaren Inversen von H_x gesichert ist. Da sich ein solches c in der Regel nicht bestimmen läßt, wird man normalerweise versuchen, das Verfahren mit relativ großem c durchzuführen und das Verfahren im Falle des Mißerfolgs mit sukzessive verkleinertem c erneut in Angriff nehmen.

VI.2.3

Wenn in einer Niveaumenge $M(H,x_o,c)$ eine eindeutig bestimmte stetige Lösung der Einbettung H existiert und H_x für jedes $\lambda \in [0,1]$ im Lösungspunkt $(x(\lambda),\lambda)$ eine koniare Inverse besitzt, so läßt sich ein Einbettungsverfahren festlegen, das im Gegensatz zu EV1 eventuell vorhandene Singularitäten von H_x in $M(H,x_o,c)$ selbständig umgeht. Hierzu werden statt (6.7) stets ungedämpfte Newton-Schritte für die Einbettung H an den Stellen (x_i,λ_{i+1}) ausgeführt. Zu x_i ist dabei λ_{i+1} jeweils so zu wählen, daß die folgenden Eigenschaften gesichert sind:

a) Das Verfahren verläßt nicht die Niveaumenge $M(H,x_o,c)$.
b) Für λ_{i+1} ist mit x_i als Startwert die Konvergenz des Newton-Verfahrens gegen die Lösung von $H(x,\lambda_{i+1}) = 0$ gesichert.
c) Die Folge $\{\lambda_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ erreicht monoton nicht fallend nach endlich vielen Schritten den Wert 1.

Wie später gezeigt wird, läßt sich die Gültigkeit dieser Eigenschaften unter geeigneten Voraussetzungen durch die folgende Vorgehensweise erreichen:

VI.3 Das Einbettungsverfahren EV2

Gegeben sei eine Einbettung H für F bezüglich x_o und eine Funktion $K2 : D \times J \times \mathbb{R}_+^o \to \mathbb{R}_+^o$.

Schritt 0: Setze $i := 0$, $\lambda_o := 0$ und wähle $\rho \in (0,1)$.

Schritt 1: Für $\delta \in [0,1-\lambda_i]$ setze wie in EV1:

(6.9) $P(x_i,\lambda_i,\delta) := \{x_i\} \times [\lambda_i,\lambda_i+\delta] \cap M(H,x_o,c)$

(6.10) $\gamma_i(\delta) := \max \{ \|H_\lambda(x_i,\lambda)\| \mid (x_i,\lambda) \in P(x_i,\lambda_i,\delta) \}$ und

(6.11) $Q(x_i,\lambda_i) := \{ \delta \in [0,1-\lambda_i] \mid \delta\, \gamma_i(\delta) \le c - \|H(x_i,\lambda_i)\| \}$.

Setze

(6.17) $\Delta\lambda_i := \max Q(x_i,\lambda_i)$

und

(6.18) $\bar\lambda_{i+1} := \lambda_i + \Delta\lambda_i$.

Schritt 2: Es sei

$\Omega_i := \{ \lambda \in J \mid \lambda \ge \lambda_i$ und $H_x(x_i,\lambda)$ besitzt keine konjare Inverse $\}$,

$$l_i := \begin{cases} \inf \Omega_i & \text{falls } \Omega_i \neq \emptyset \\ 2 & \text{falls } \Omega_i = \emptyset \end{cases}$$ und

$L_i := [\lambda_i,\bar\lambda_{i+1}] \cap [\lambda_i,l_i)$

Für $\lambda \in L_i$ sei

(6.19) $\beta_i(\lambda) := \|H_x^{-1}(x_i,\lambda)\|$

(6.20) $\Delta x_i(\lambda) := - H_x^{-1}(x_i,\lambda)\, H(x_i,\lambda)$

(6.21) $\zeta_i(\lambda) := \|\Delta x_i(\lambda)\|$

(6.22) $\eta_i(\lambda) := K2(x_i,\lambda,2\zeta_i(\lambda))\, \beta_i(\lambda)\, \zeta_i(\lambda)$.

Bestimme $\lambda_{i+1} \in L_i$ so, daß

(6.23) $\eta_i(\lambda_{i+1}) \le \frac{1}{2}$

(6.24) i) $\lambda_{i+1} = \bar\lambda_{i+1}$ falls $\eta_i(\lambda_{i+1}) < \frac{1}{2}\rho$ und $l_i > \bar\lambda_{i+1}$

ii) $\lambda_{i+1} \ge \frac{1}{2}(\lambda_i + l_i)$ falls $\eta_i(\lambda_{i+1}) < \frac{1}{2}\rho$ und $l_i \le \bar\lambda_{i+1}$.

Schritt 3: Setze $x_{i+1} := x_i + \Delta x_i(\lambda_{i+1})$, erhöhe i um 1 und gehe zu Schritt 1.

VI.4 Bemerkung

EV1 besitzt gegenüber EV2 im Hinblick auf die Anwendung den großen Vorteil, daß in jedem Iterationsschritt die Größen λ_{i+1} und μ_i separiert voneinander zu bestimmen sind. Bezogen auf Schritt 3 von EV1 ist insbesondere festzustellen, daß bei jeder einzelnen Iteration die Größen Γ_i und Δx_i nur einmal mit dem vorher bestimmten λ_{i+1} ermittelt werden müssen. Wegen (4.15) hängt η_i in (6.14) über die Lipschitzfunktion K1 monoton von μ ab, so daß es relativ leicht ist, μ_i mit (6.15) und (6.16) festzulegen. Demgegenüber ist die Abhängigkeit von η_i aus (6.22) in λ eventuell hochgradig nichtlinear, denn sowohl β_i und ζ_i als auch die Funktion K2 hängen im allgemeinen von λ ab. Die Bestimmung von λ_{i+1} mit (6.23) und (6.24) erfordert deshalb in der Regel entweder weitgehende theoretische Überlegungen und Abschätzungen, oder aber (bei iterativer Ermittlung von λ_{i+1}) die unter Umständen oftmalige Berechnung der Größen $\beta_i(\lambda)$, $\zeta_i(\lambda)$ und $K2(x_i,\lambda,2\zeta_i(\lambda))$ für jeweils verschiedene λ - Werte. Das bedeutet, daß der Aufwand für die Bestimmung von λ_{i+1} in EV2 den Aufwand für die Durchführung des eigentlichen Iterationsschrittes um ein Vielfaches übertreffen kann. Somit wird der Vorteil der Umgehung eventueller Singularitäten durch entsprechend höheren numerischen Aufwand erkauft, und die Anwendung von EV2 ist nur zu empfehlen, wenn vorher EV1 fehlgeschlagen ist.

VII. AUSFÜHRBARKEITSAUSSAGEN FÜR EV1

Zur Vorbereitung eines Ausführbarkeitssatzes ist zunächst die Herleitung einiger Hilfsaussagen erforderlich.

VII.1 Hilfssatz

Es seien X, Z Banachräume, $\emptyset \neq D$ offen $\subset X$, $T : D \to Z$, $i \in \mathbb{N}_0$.
Zu $x_i \in D$, $y_i \in X$ und $\mu \in [0,1]$ sei

(7.1) $x_i(\mu) := x_i + \mu y_i$.

Mit $\bar{\mu}_i \in (0,1]$ gelte

(V1) $\forall\, \mu \in [0,\bar{\mu}_i] :$ $x_i(\mu) \in D$

(V2) $\forall\, \mu \in [0,\bar{\mu}_i] :$ T ist stetig Fréchet-differenzierbar bei $x_i(\mu)$

(V3) T' ist bei x_i in Richtung y_i folgendermaßen Lipschitz-stetig:
Es existiert eine stetige Funktion $K(x_i,y_i,.) : [0,\bar{\mu}_i] \to \mathbb{R}_+^0$ mit

(7.2) $\forall\, \mu \in [0,\bar{\mu}_i] \;\wedge\; \forall\, \tau \in [0,\mu] :$

$$\|T'(x_i(\tau)) - T'(x_i)\| \leq K(x_i,y_i,\mu)\, \|x_i(\tau) - x_i\|$$

(B1) Dann gilt $\forall\, \mu \in [0,\bar{\mu}_i] :$

$$\|T(x_i(\mu)) - T(x_i) - T'(x_i)(x_i(\mu)-x_i)\| \leq \tfrac{1}{2} K(x_i,y_i,\mu)\|x_i(\mu)-x_i\|^2$$

Beweis:

Die Funktion $\varphi : [0,\bar{\mu}_i] \to Z$ vermöge

$\forall\, \mu \in [0,\bar{\mu}_i] :$ $\varphi(\mu) := T(x_i(\mu))$

ist gemäß (V1) wohldefiniert und nach (V2) und (7.1) auf $[0,\bar{\mu}_i]$ stetig Fréchet-differenzierbar (an den Intervallgrenzen einseitig) mit

$\forall\, \mu \in [0,\bar{\mu}_i] :$ $\varphi'(\mu) = T'(x_i(\mu))\, x_i'(\mu) = T'(x_i(\mu))\, y_i$.

Es folgt daher für $\mu \in [0,\bar{\mu}_i]$ und $\tau \in [0,\mu]$ nach (V3) die Abschätzung:

(7.3)
$$\begin{aligned} \|\varphi'(\tau) - \varphi'(0)\| &= \|(T'(x_i(\tau)) - T'(x_i(0)))\, y_i\| \\ &\leq \|T'(x_i(\tau)) - T'(x_i)\|\, \|y_i\| \\ &\leq K(x_i,y_i,\mu)\, \|x_i(\tau) - x_i\|\, \|y_i\| \\ &= K(x_i,y_i,\mu)\, \tau\, \|y_i\|^2 \end{aligned}$$

Ferner gilt $\forall\ \mu \in [0,\bar{\mu}_i]$:

$$T(x_i(\mu)) - T(x_i) - T'(x_i)(x_i(\mu)-x_i) = \varphi(\mu) - \varphi(0) - \mu\varphi'(0)$$
$$= \int_0^\mu (\varphi'(\tau) - \varphi'(0))\, d\tau .$$

Daraus folgt zusammen mit (7.3) $\forall\ \mu \in [0,\bar{\mu}_i]$:

$$\|T(x_i(\mu)) - T(x_i) - T'(x_i)(x_i(\mu)-x_i)\| = \| \int_0^\mu (\varphi'(\tau) - \varphi'(0))\, d\tau \|$$
$$\leq \int_0^\mu \|\varphi'(\tau) - \varphi'(0)\|\, d\tau$$
$$\leq K(x_i,y_i,\mu)\, \|y_i\|^2 \int_0^\mu \tau\, d\tau$$
$$= \frac{1}{2} K(x_i,y_i,\mu)\, \mu^2\, \|y_i\|^2$$
$$= \frac{1}{2} K(x_i,y_i,\mu)\, \|x_i(\mu) - x_i\|^2 \quad \blacktriangle$$

VII.2 Bemerkung

Ist (V1) aus Hilfssatz VII.1 erfüllt und ist T für alle $\mu \in [0,\bar{\mu}_i]$ bei $x_i(\mu)$ zweimal stetig Fréchet-differenzierbar, so gilt nach dem Mittelwertsatz (siehe DIEUDONNÉ [13], 8.5.4) :

$\forall\ \mu \in [0,\bar{\mu}_i] \ \wedge\ \forall\ \tau \in [0,\mu]$:

$$\|T'(x_i(\tau)) - T'(x_i)\| \leq \sup_{t\in[0,\tau]} \|T''(x_i(t))\|\, \|x_i(\tau) - x_i\|$$
$$\leq \sup_{t\in[0,\mu]} \|T''(x_i(t))\|\, \|x_i(\tau) - x_i\|$$

Das bedeutet, daß dann (7.2) in (V3) mit der durch

(7.4) $\forall\ \mu \in [0,\bar{\mu}_i]$: $K(x_i,y_i,\mu) := \sup_{t\in[0,\mu]} \|T''(x_i(t))\|$

definierten Funktion K erfüllt ist. Folglich gilt dann in (B1):

(7.5) $\forall\ \mu \in [0,\bar{\mu}_i]$: $\|T(x_i(\mu)) - T(x_i) - T'(x_i)(x_i(\mu)-x_i)\| \leq$

$$\leq \frac{1}{2} \sup_{t\in[0,\mu]} \|T''(x_i(t))\|\, \|x_i(\mu) - x_i\|^2 .$$

VII.3 Hilfssatz

Es seien X, Z Banachräume, $\emptyset \neq D$ offen $\subset X$, $T : D \to Z$, $x_i \in D$, $\Gamma_i \in L(Z,X)$, $d, q \in \mathbb{R}_+^\circ$ mit $0 \leq d < q < 1$.

Für $y_i := - \Gamma_i T(x_i)$ und $\mu \in [0,1]$ sei $x_i(\mu)$ definiert wie in (7.1) :

(7.6) $\forall \mu \in [0,1] : \quad x_i(\mu) := x_i - \mu \Gamma_i T(x_i)$

Mit $\bar{\mu}_i \in (0,1]$ gelte:

(V1) $\forall \mu \in [0,\bar{\mu}_i] : \quad x_i(\mu) \in D$

(V2) $\forall \mu \in [0,\bar{\mu}_i] : \quad T$ ist stetig Fréchet-differenzierbar bei $x_i(\mu)$

(V3) T' ist bei x_i in Richtung y_i folgendermaßen Lipschitz-stetig:
Es existiert eine stetige Funktion $K(x_i,y_i,\cdot) : [0,\bar{\mu}_i] \to \mathbb{R}_+^o$
mit

(7.2) $\forall \mu \in [0,\bar{\mu}_i] \quad \forall \tau \in [0,\mu] :$
$\|T'(x_i(\tau)) - T'(x_i)\| \leq K(x_i,y_i,\mu) \|x_i(\tau) - x_i\|$

(V4) Es existiert $T'^{-1}(x_i) \in L(Z,X)$

(V5) $\|I - T'(x_i) \Gamma_i\| \leq d$

(B1) Dann gilt mit
$L := \{ \mu_o \in [0,\bar{\mu}_i] \mid \forall \mu \in [0,\mu_o] : \mu K(x_i,y_i,\mu) \|\Gamma_i\| \|\Gamma_i T(x_i)\| \leq 2(q-d) \}$
und $\tilde{\mu}_i := \max L$

(7.7) $\forall \mu \in [0,\tilde{\mu}_i] : \quad \|T(x_i(\mu))\| \leq (1 - (1-q)\mu) \|T(x_i)\|$

Beweis:

Da $K(x_i,y_i,\cdot)$ nach (V3) auf $[0,\bar{\mu}_i]$ stetig ist existiert

$$K_i := \max_{\mu \in [0,\bar{\mu}_i]} K(x_i,y_i,\mu) .$$

Falls nun $K_i \|\Gamma_i\| \|\Gamma_i T(x_i)\| = 0$, so gilt

$\forall \mu \in [0,\bar{\mu}_i] : \quad \mu K(x_i,y_i,\mu) \|\Gamma_i\| \|\Gamma_i T(x_i)\| \leq 2 (q - d)$,

so daß $\tilde{\mu}_i = \bar{\mu}_i$.

Falls $K_i \|\Gamma_i\| \|\Gamma_i T(x_i)\| \neq 0$, so ist sicher $\mu_1 \in L$, wenn

$$\mu_1 := \min \{ \bar{\mu}_i , \frac{2 (q - d)}{K_i \|\Gamma_i\| \|\Gamma_i T(x_i)\|} \} ,$$

denn für $\mu \in [0,\mu_1]$ gilt dann

$\mu K(x_i,y_i,\mu) \|\Gamma_i\| \|\Gamma_i T(x_i)\| \leq \mu_1 K_i \|\Gamma_i\| \|\Gamma_i T(x_i)\| \leq 2 (q - d)$.

Also ist L nichtleer und durch $\bar{\mu}_i$ nach oben beschränkt. Infolgedessen existiert das Supremum von L und wegen der Stetigkeit von $\mu K(x_i,y_i,\mu)$ in μ wird dieses als Maximum $\tilde{\mu}_i$ angenommen. Da entweder $\tilde{\mu}_i = \bar{\mu}_i > 0$ oder $\tilde{\mu}_i \geq \mu_1 > 0$ gilt, ist $\tilde{\mu}_i$ positiv.

Setzt man $T_1 := T'^{-1}(x_i)$ und $T_2 := \Gamma_i$, so gilt:

$T_1, T_2 \in L(Z,X)$,

T_1 besitzt eine koniare Inverse, nämlich $T'(x_i)$

und nach (V5) existiert $d < 1$ mit

$$\|T_1^{-1}(T_2 - T_1)\| = \|T'(x_i)\Gamma_i - I\| \leq d .$$

Mit dem Banach-Lemma (siehe IV.17) folgt daraus die Existenz einer koniaren Inversen für $T_2 = \Gamma_i$.

Gleichung (7.6) ist deshalb äquivalent zu

(7.8) $\quad \forall\, \mu \in [0,1] : \quad \Gamma_i^{-1}(x_i(\mu) - x_i) + \mu\, T(x_i) = 0 .$

Unter Verwendung dieser Beziehung gilt:

(7.9) $\quad \forall\, \mu \in [0,\tilde{\mu}_i] :$

$$\begin{aligned}
&\|T(x_i(\mu)) - (1-\mu)\, T(x_i)\| = \\
&= \|T(x_i(\mu)) - (1-\mu)\, T(x_i) - \Gamma_i^{-1}(x_i(\mu) - x_i) - \mu\, T(x_i)\| \\
&= \|T(x_i(\mu) - T(x_i) - \Gamma_i^{-1}(x_i(\mu) - x_i)\| \\
&= \|T(x_i(\mu)) - T(x_i) - T'(x_i)(x_i(\mu) - x_i) + T'(x_i)(x_i(\mu) - x_i) - \Gamma_i^{-1}(x_i(\mu) - x_i)\| \\
&\leq \|T(x_i(\mu) - T(x_i) - T'(x_i)(x_i(\mu) - x_i)\| + \|(T'(x_i) - \Gamma_i^{-1})(x_i(\mu) - x_i)\|
\end{aligned}$$

Wegen (V1), (V2) und (V3) gilt (B1) aus Hilfssatz VII.1.
Mit $\tilde{\mu}_i \in (0,\bar{\mu}_i]$ folgt daher

(7.10) $\quad \forall\, \mu \in [0,\tilde{\mu}_i] :$

$$\begin{aligned}
&\|T(x_i(\mu)) - T(x_i) - T'(x_i)\,(x_i(\mu) - x_i)\| \leq \\
&\leq \tfrac{1}{2} K(x_i,y_i,\mu)\, \|x_i(\mu) - x_i\|^2 \\
&= \tfrac{1}{2} K(x_i,y_i,\mu)\, \|\mu\, \Gamma_i\, T(x_i)\|^2 \\
&\leq \tfrac{1}{2} \mu\, K(x_i,y_i,\mu)\, \|\Gamma_i\|\, \|\Gamma_i\, T(x_i)\|\, \mu\, \|T(x_i)\| .
\end{aligned}$$

Ist $\mu \in [0,\tilde{\mu}_i]$, so folgt aus der Definition von $\tilde{\mu}_i$, daß $\mu \in L$, und nach Definition von L ist dann

$\frac{1}{2}\ \mu\ K(x_i,y_i,\mu)\ \|\Gamma_i\|\ \|\Gamma_i\ T(x_i)\| \le q - d$.

Somit kann (7.10) weiter abgeschätzt werden zu

(7.11) $\forall\ \mu \in [0,\tilde{\mu}_i]$:

$$\|T(x_i(\mu)) - T(x_i) - T'(x_i)\ (x_i(\mu) - x_i)\| \le (q - d)\ \mu\ \|T(x_i)\| .$$

Für den zweiten Summanden aus der größeren Seite der Ungleichung (7.9) gilt mit (V5):

(7.12) $\forall\ \mu \in [0,\tilde{\mu}_i]$:

$$\begin{aligned}\|(T'(x_i) - \Gamma_i^{-1})\ (x_i(\mu) - x_i)\| &= \|(T'(x_i) - \Gamma_i^{-1})\ (-\mu\ \Gamma_i\ T(x_i)\| \\ &= \|(I - T'(x_i)\ \Gamma_i)\ \mu\ T(x_i)\| \\ &\le \|I - T'(x_i)\ \Gamma_i\|\ \mu\ \|T(x_i)\| \\ &\le d\ \mu\ \|T(x_i)\| .\end{aligned}$$

Aus (7.9) läßt sich deshalb mit (7.11) und (7.12) folgern:

$\forall\ \mu \in [0,\tilde{\mu}_i]$:

$$\|T(x_i(\mu)) - (1-\mu)\ T(x_i)\| \le (q - d)\ \mu\ \|T(x_i)\| + d\ \mu\ \|T(x_i)\| = q\ \mu\ \|T(x_i)\|.$$

Hieraus folgt

$\forall\ \mu \in [0,\tilde{\mu}_i]$: $\|T(x_i(\mu))\| - (1-\mu)\ \|T(x_i)\| \le q\ \mu\ \|T(x_i)\|$, so daß

$\forall\ \mu \in [0,\tilde{\mu}_i]$: $\|T(x_i(\mu))\| \le (1 - (1-q)\mu)\ \|T(x_i)\|$. ▲

VII.4 Hilfssatz

Es sei H eine Einbettung für F bezüglich $x_o \in D$, $c \in \mathbb{R}_+$, $i \in \mathbb{N}_o$.

Für $(x_i,\lambda_i) \in M(H,x_o,c)$ und $\delta \in [0,1-\lambda_i]$ sei $\gamma_i(\delta) \in \mathbb{R}_+^o$ und

$P(x_i,\lambda_i,\delta) := \{x_i\} \times [\lambda_i,\lambda_i+\delta] \cap M(H,x_o,c)$.

Es gelte:

(V1) $M(H,x_o,c)$ ist abgeschlossen

(V2) $\forall\ (x_i,\lambda) \in P(x_i,\lambda_i,\delta)$:

H ist bei (x_i,λ) bezüglich λ stetig Fréchet-differenzierbar

(V3) $\forall\ (x_i,\lambda) \in P(x_i,\lambda_i,\delta)$: $\|H_\lambda(x_i,\lambda)\| \le \gamma_i(\delta)$

(B1) Dann gilt mit $\delta_i := \max\ \{\ s \in [0,\delta]\ |\ s\ \gamma_i(\delta) \le c - \|H(x_i,\lambda_i)\|\ \}$

$\forall\ \lambda \in [\lambda_i,\lambda_i+\delta_i]$: $(x_i,\lambda) \in M(H,x_o,c)$.

Beweis:

Für den Fall $\delta_i = 0$, d.h. $\delta = 0$ oder $\|H(x_i,\lambda_i)\| = c$ ist (B1) trivialerweise erfüllt, da dann $[\lambda_i,\lambda_i+\delta] = \{\lambda_i\}$ und $(x_i,\lambda_i) \in M(H,x_o,c)$.

Sei also $\delta_i \neq 0$.
Dann ist $\|H(x_i,\lambda_i)\| < c$ und es muß $\delta > 0$ sein, was nur bei $\lambda_i < 1$ möglich ist. Wegen der nach (V2) bezüglich λ geltenden Stetigkeit von H bei (x_i,λ_i) existiert daher $d_i \in \mathbb{R}_+$ mit $0 < d_i < \delta$ und

$$\forall\, \lambda \in [\lambda_i,\lambda_i+d_i] : \quad \|H(x_i,\lambda)\| \leq c \ .$$

Setzt man nun

$$Q_i := \{\, \Delta\lambda \in [0,\delta] \mid \forall\, \lambda \in [\lambda_i,\lambda_i+\Delta\lambda] : (x_i,\lambda) \in M(H,x_o,c)\,\} \ ,$$

so gilt $[0,d_i] \subset Q_i$. Außerdem ist Q_i beschränkt, so daß $\overline{\delta}_i := \sup Q_i$ existiert mit $0 < d_i \leq \overline{\delta}_i \leq \delta$.

Für $\overline{\delta}_i$ gilt dann gemäß Definition :

$$\forall\, \lambda \in [\lambda_i,\lambda_i+\overline{\delta}_i) : \quad (x_i,\lambda) \in M(H,x_o,c)$$

und wegen der Abgeschlossenheit von $M(H,x_o,c)$ nach (V1) damit auch

$$(7.13) \quad \forall\, \lambda \in [\lambda_i,\lambda_i+\overline{\delta}_i] : \quad (x_i,\lambda) \in M(H,x_o,c) \ ,$$

so daß das Supremum $\overline{\delta}_i$ von Q_i als Maximum angenommen wird.

(B1) ist nun bewiesen, wenn $\overline{\delta}_i \geq \delta_i$ gezeigt werden kann.

Angenommen, es sei

$$(7.14) \quad \overline{\delta}_i < \delta_i \ .$$

Dann gilt $\{x_i\} \times [\lambda_i,\lambda_i+\overline{\delta}_i] \subset \{x_i\} \times [\lambda_i,\lambda_i+\delta_i]$, so daß mit (7.13)

$$(7.15) \quad \{x_i\} \times [\lambda_i,\lambda_i+\overline{\delta}_i] \subset P(x_i,\lambda_i,\delta) \ .$$

Wegen (V2) kann daher für $\lambda \in [\lambda_i,\lambda_i+\overline{\delta}_i]$ der Mittelwertsatz (vergl. z.B. DIEUDONNÉ [16], 8.5.4) angewendet werden:

$$(7.16) \quad \forall\, \lambda \in [\lambda_i,\lambda_i+\overline{\delta}_i] : \|H(x_i,\lambda)\| \leq \|H(x_i,\lambda_i)\| + \|H_\lambda(x_i,\tilde{\lambda})\|\,(\lambda - \lambda_i)$$
$$\text{mit einer Zwischenstelle } \tilde{\lambda} \in [\lambda_i,\lambda_i+\overline{\delta}_i] \ .$$

Da $(x_i,\tilde{\lambda}) \in P(x_i,\lambda_i,\delta)$ folgt aus (V3), daß $\|H_\lambda(x_i,\tilde{\lambda})\| \leq \gamma_i(\delta)$.

Aus (7.16), (7.14) sowie der Definition von δ_i erhält man deshalb:

$$(7.17) \quad \forall\, \lambda \in [\lambda_i,\lambda_i+\overline{\delta}_i] :$$
$$\|H(x_i,\lambda)\| \leq \|H(x_i,\lambda_i)\| + \gamma_i(\delta)\,\overline{\delta}_i < \|H(x_i,\lambda_i)\| + \gamma_i(\delta)\,\delta_i \leq$$
$$\leq \|H(x_i,\lambda_i)\| + c - \|H(x_i,\lambda_i)\| = c$$

Mit (7.14) folgt gemäß der Definition von δ_i und der Wahl von δ :

$\lambda_i + \bar{\delta}_i < \lambda_i + \delta_i \leq \lambda_i + \delta \leq \lambda_i + (1 - \lambda_i) = 1$.

Außerdem ist nach (7.17) $\|H(x_i,\lambda_i+\bar{\delta}_i)\| < c$ und nach (V2) ist H wegen (7.15) in $(x_i,\lambda_i+\bar{\delta}_i)$ stetig. Deshalb ist die Existenz eines $d_i \in \mathbb{R}_+$ gesichert mit $0 < d_i < 1 - (\lambda_i+\bar{\delta}_i)$ und

(7.18) $\forall\, \lambda \in [\lambda_i+\bar{\delta}_i, \lambda_i+\bar{\delta}_i+d_i] : \quad \|H(x_i,\lambda)\| \leq c$.

Faßt man (7.17) und (7.18) zusammen, so erhält man

$\forall\, \lambda \in [\lambda_i, \lambda_i+\bar{\delta}_i+d_i] : \quad (x_i,\lambda) \in M(H,x_o,c)$.

Dies steht aber im Widerspruch zur Definition von $\bar{\delta}_i$. Also war die Annahme (7.14) falsch und es muß $\bar{\delta}_i \geq \delta_i$ gelten. ▲

VII.5 Ausführbarkeitssatz für EV1

Es sei H eine Einbettung für F bezüglich x_o, $c \in \mathbb{R}_+$.

Es gelte:

(V1) $M(H,x_o,c)$ ist abgeschlossen

(V2) H ist auf $M(H,x_o,c)$ regulär

(V3) H_x erfüllt die Lipschitzbedingung $L1(M(H,x_o,c))$

(V4) Es existiert eine positive Konstante γ mit

$\forall\, (x,\lambda) \in M(H,x_o,c) : \quad \|H_\lambda(x,\lambda)\| \leq \gamma$

(B1) Dann gilt:
Das Einbettungsverfahren EV1 ist mit H und der nach (V3) gemäß Definition IV.15 existierenden Funktion K1 für x_o ausführbar.

Beweis:

Mit der Regularitätskonstanten β nach (V2) und den Konstanten κ aus (V3) und γ aus (V4) sowie c, d, q, ϱ aus EV1 sei:

$\bar{\beta} := (1 + d)\, \beta$,

$\underline{\mu} := \min \{ 1 , \varrho \frac{2\,(q - d)}{\kappa\, \bar{\beta}^2\, c} \}$

$\alpha := 1 - (1-q)\, \underline{\mu}$ und

$\underline{\delta} := \frac{(1 - \alpha)\, c}{\gamma}$.

Zum Beweis von (B1) ist zu zeigen, daß EV1 für den Startwert x_o wohldefiniert und lösungskonvergent ist. Hierzu werden die folgenden Hilfsaussagen verwendet, deren Gültigkeit zunächst nachgewiesen wird:

(A): Ist $(x_i,\lambda_i) \in M(H,x_o,c)$ mit $\|H(x_i,\lambda_i)\| \leq \alpha\, c$, so ist $\lambda_{i+1} = \lambda_i + \Delta\lambda_i$ nach Schritt 1 von EV1 wohldefiniert mit

(7.19) $\min \{ 1 - \lambda_i, \underline{\delta} \} \leq \Delta\lambda_i \leq 1 - \lambda_i$ und

(7.20) $(x_i,\lambda_{i+1}) \in M(H,x_o,c)$

(B): Ist $(x_i,\lambda_{i+1}) \in M(H,x_o,c)$, so existiert $\Gamma_i \in L(Z,X)$ nach Schritt 2 von EV1 und es ist

(7.21) $\|\Gamma_i\| \leq \overline{\beta}$

(C): Ist $(x_i,\lambda_{i+1}) \in M(H,x_o,c)$ und Γ_i nach Schritt 2 von EV1 gewählt, so ist $x_{i+1} = x_i + \mu_i \Delta x_i$ nach Schritt 3 von EV1 wohldefiniert mit

(7.22) $(x_{i+1},\lambda_{i+1}) \in M(H,x_o,c)$

(7.23) $\mu_i \geq \underline{\mu}$

(7.24) $\|H(x_{i+1},\lambda_{i+1})\| \leq \alpha\, \|H(x_i,\lambda_{i+1})\| \leq \alpha\, c$

zu (A):

Sei $i \in \mathbb{N}_o$, $(x_i,\lambda_i) \in M(H,x_o,c)$ und $\delta \in [0,1-\lambda_i]$.

Mit (V1) ist dann $P(x_i,\lambda_i,\delta) = \{x_i\} \times [\lambda_i,\lambda_i+\delta] \cap M(H,x_o,c)$ als Durchschnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\{x_i\} \times [\lambda_i,\lambda_i+\delta]$ ist $P(x_i,\lambda_i,\delta)$ sogar kompakt. Wegen (V2) ist H auf $P(x_i,\lambda_i,\delta)$ bezüglich λ stetig Fréchet-differenzierbar, so daß $\gamma_i(\delta)$ nach (6.16) als Maximum der stetigen Funktion $\|H_\lambda(x_i,.)\|$ auf der kompakten Menge $P(x_i,\lambda_i,\delta)$ für alle $\delta \in [0,1-\lambda_i]$ wohldefiniert ist. Dabei hängt $\gamma_i(\delta)$ stetig von δ ab und ist monoton nicht fallend. Wegen $P(x_i,\lambda_i,\delta) \subset M(H,x_o,c)$ gilt mit (V4) ferner:

(7.25) $\forall\, \delta \in [0,1-\lambda_i] : \quad \gamma_i(\delta) \leq \gamma.$

Da $Q(x_i,\lambda_i) = \{ \delta \in [0,1-\lambda_i] \mid \delta\, \gamma_i(\delta) \leq c - \|H(x_i,\lambda_i)\| \}$ stets die Null enthält (also nichtleer ist) und außerdem durch $(1 - \lambda_i)$ beschränkt ist, existiert das Supremum von $Q(x_i,\lambda_i)$ und wegen der Stetigkeit von

$\delta\ \gamma_i(\delta)$ wird dieses in (6.12) als Maximum $\Delta\lambda_i$ angenommen. Deshalb ist $\lambda_{i+1} = \lambda_i + \Delta\lambda_i$ in Schritt 1 von EV1 wohldefiniert.

Betrachtet man nun den Hilfssatz VII.4 für (x_i,λ_i), $\delta := \Delta\lambda_i$ und $\gamma_i(\Delta\lambda_i)$ nach (6.10), so stellt man fest, daß alle dort geforderten Voraussetzungen erfüllt sind, denn:
(V1) entspricht (V1) aus Satz VII.5
(V2) gilt nach (V2) aus Satz VII.5, da $P(x_i,\lambda_i,\Delta\lambda_i) \subset M(H,x_o,c)$
(V3) gilt nach Definition von $\gamma_i(\Delta\lambda_i)$.

In (B1) von Hilfssatz VII.4 ergibt sich dann $\bar{\delta}_i = \Delta\lambda_i$, so daß

$$\forall\ \lambda \in [\lambda_i,\lambda_i+\Delta\lambda_i]: \quad (x_i,\lambda) \in M(H,x_o,c) ,$$

womit speziell (7.20) gilt.

Wegen $\|H(x_i,\lambda_i)\| \leq \alpha\ c$ ist $1 - \alpha\ c \leq 1 - \|H(x_i,\lambda_i)\|$. Unter Verwendung von (7.25) folgt daraus

$$(7.26) \quad \min\{\ 1 - \lambda_i,\ \underline{\delta}\ \} \leq \Delta\lambda_i .$$

Falls nämlich $\underline{\delta} \leq 1 - \lambda_i$, so ist

$$\underline{\delta}\ \gamma_i(\underline{\delta}) \leq \underline{\delta}\ \gamma = (1 - \alpha)\ c \leq c - \|H(x_i,\lambda_i)\|$$

und damit $\underline{\delta} \leq \Delta\lambda_i$ gemäß Definition von $\Delta\lambda_i$.

Falls andererseits $1 - \lambda_i < \underline{\delta}$, so gilt

$$(1 - \lambda_i)\ \gamma_i(1 - \lambda_i) < \underline{\delta}\ \gamma = (1 - \alpha)\ c \leq c - \|H(x_i,\lambda_i)\|$$

und damit $\Delta\lambda_i = 1 - \lambda_i$.

(7.19) ergibt sich nun aus (7.26), weil $\Delta\lambda_i \leq 1 - \lambda_i$ nach Definition stets gilt.

Zu (B):

Wegen $(x_i,\lambda_{i+1}) \in M(H,x_o,c)$ existiert $H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})$ nach (V2) mit

$$(7.27) \quad \|H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})\| \leq \beta .$$

Deshalb ist $\{\ \Gamma \in L(Z,X) \mid \|I - H_x(x_i,\lambda_{i+1})\,\Gamma\| \leq d\ \} \neq \emptyset$ für jedes $d \geq 0$, und es kann Γ_i nach Schritt 2 von EV1 gewählt werden.
Hierfür gilt dann nach (7.27) :

$$\|\Gamma_i\| - \beta \leq \|\Gamma_i\| - \|H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})\| \leq \|H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1}) - \Gamma_i\| =$$

$= \|H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})\ (I - H_x(x_i,\lambda_i)\ \Gamma_i)\|$

$\leq \|H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})\|\ \|I - H_x(x_i,\lambda_{i+1})\ \Gamma_i\| \leq \beta\ d\ ,$

so daß $\|\Gamma_i\| \leq (1 + d)\ \beta = \bar{\beta}$.

Zu (C):

Sei $(x_i,\lambda_{i+1}) \in M(H,x_o,c)$ und Γ_i nach Schritt 2 von EV1 mit (6.13) gewählt. Nach (V2) existiert zu $M(H,x_o,c)$ eine offene Umgebung U_1, auf der H stetig Fréchet-differenzierbar ist. Außerdem existiert nach (V3) zu $M(H,x_o,c)$ eine Umgebung $U_2 \subset D \times J$, in der mit K1 und $\varkappa$ aus Definition IV.15 die Eigenschaften (4.14) bis (4.16) erfüllt sind.

$U := U_1 \cap U_2$ ist dann eine offene Umgebung von $M(H,x_o,c)$ für die gilt:

(7.28) $U \subset D \times J$

(7.29) H ist auf U stetig Fréchet-differenzierbar

(7.30) Mit K1 und $\varkappa$ aus Definition IV.15 gilt (4.14) bis (4.16) für alle $(x,\lambda) \in M(H,x_o,c)$, $y \in X$ und $\mu \in [0,1]$.

Zu $(x_i,\lambda_{i+1}) \in M(H,x_o,c)$ existiert dann ein $\varepsilon_o > 0$, so daß

(7.31) $\forall\ \mu \in [0,\varepsilon_o]:\quad (x_i(\mu),\lambda_{i+1}) \in U$

gilt, woraus sich mit (7.28) insbesondere

(7.32) $\forall\ \mu \in [0,\varepsilon_o]:\quad x_i(\mu) \in D$

ergibt.

Wegen (7.31) folgt mit (4.14):

(7.33) Die Funktion $K1(x_i,\lambda_{i+1},y_i,.)$ ist auf $[0,\varepsilon_o]$ stetig.

Also existiert

(7.34) $\varkappa_1 := \max\limits_{\mu\in[0,\varepsilon_o]} K1(x_i,\lambda_{i+1},y_i,\mu)$.

Ferner existiert eine Konstante $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_o]$ mit

(7.35) $\varepsilon_1\ \varkappa_1\ \|\Gamma_i\|\ \|\Gamma_i\ H(x_i,\lambda_{i+1})\| \leq 2\ (q - d)$.

Definiert man nun $K(x_i,y_i,.) : [0,1] \to \mathbb{R}_+^o$ mit der Funktion K1 aus Definition IV.10 vermöge

(7.36) $\forall\ \mu \in [0,1]:\quad K(x_i,y_i,\mu) := K1(x_i,\lambda_{i+1},y_i,\mu)$,

und $T : D \to Z$ vermöge

(7.37) $\forall\, x \in D : \quad T(x) := H(x,\lambda_{i+1})$,

so gilt in Hilfssatz VII.3 für $\bar{\mu}_i := \varepsilon_1$

(V1) wegen (7.32),
(V2) wegen (7.29) und (7.31),
(V3) wegen (7.33), (7.30), (7.31) und (4.14),
(V4) wegen (4.13) nach (V2) aus Satz VII.5 weil $(x_i,\lambda_{i+1}) \in M(H,x_o,c)$,
(V5) wegen der Wahl von Γ_i mit (6.13).

Folglich erhält man (B1) aus Hilfssatz VII.3.

Nach (7.34) und (7.35) gilt

(7.38) $\forall\, \mu \in [0,\varepsilon_1] : \quad \mu\, K(x_i,y_i,\mu)\, \|\Gamma_i\|\, \|\Gamma_i T(x_i)\| \leq 2\,(q-d)$.

Deshalb ergibt sich in (B1) von Hilfssatz VII.3 $\tilde{\mu}_i = \varepsilon_1$, so daß

(7.39) $\forall\, \mu \in [0,\varepsilon_1] : \quad (x_i(\mu),\lambda_{i+1}) \in M(H,x_o,c)$ mit

$$\|H(x_i(\mu),\lambda_{i+1})\| \leq (1-(1-q)\,\mu)\, \|H(x_i,\lambda_{i+1})\| .$$

Gemäß Definition (7.36), (7.37) und (6.14) ist

(7.40) $\forall\, \mu \in [0,1] : \quad \mu\, K(x_i,y_i,\mu)\, \|\Gamma_i\|\, \|\Gamma_i\, T(x_i)\| = \eta_i(\mu)$.

Sei nun

$$N_1 := \{\, \bar{\mu} \in [0,1] \mid \forall\, \mu \in [0,\bar{\mu}] : \ (x_i(\mu),\lambda_{i+1}) \in M(H,x_o,c) \,\} ,$$

$$N_2 := \{\, \bar{\mu} \in [0,1] \mid \forall\, \mu \in [0,\bar{\mu}] : \ \eta_i(\mu) \leq 2\,(q-d) \,\}$$

und

$\varepsilon_1 := \sup N_1$ sowie $\varepsilon_2 := \sup N_2$.

Dann gilt $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_1$ nach (7.39), $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$ nach (7.38) und außerdem läßt sich zeigen, daß

(7.41) $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$.

Angenommen, es sei

(7.42) $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

Dann gilt

(7.43) $\forall\, \mu \in [0,\varepsilon_1] : \quad \eta_i(\mu) \leq 2\,(q-d)$.

Wegen der Abgeschlossenheit von $M(H,x_o,c)$ nach (V1) ist außerdem $\varepsilon_1 = \max N_1$, so daß

(7.44) $\forall\, \mu \in [0,s_1] : \quad (x_i(\mu),\lambda_{i+1}) \in M(H,x_o,c)$.

Mit K nach (7.36) und T nach (7.37) sind für $\bar{\mu}_i = s_1$ nun wiederum die Voraussetzungen von Hilfssatz VII.3 erfüllt und zwar

(V1) wegen (7.44) und $M(H,x_o,c) \subset D \times J$
(V2) wegen (7.44) und (V2) aus Satz VII.5
(V3) wegen (7.44), $M(H,x_o,c) \subset U$ und (4.14)
(V4) wegen (4.13) nach (V2) aus Satz VII.5
(V5) wegen der Wahl von Γ_i mit (6.13)

In (B1) von Hilfssatz VII.3 ergibt sich dann $\tilde{\mu}_i = s_1$ wegen (7.43), so daß aus (7.7) speziell

$\|H(x_i(s_1),\lambda_{i+1})\| \leq (1-(1-q)\, s_1)\, \|H(x_i,\lambda_{i+1})\| \leq (1 - (1-q)\, s_1)\, c$

folgt.
Weil $1 \geq s_2 > s_1 \geq \varepsilon_1 > 0$ gilt und $\|H(x_i(.),\lambda_{i+1})\|$ in s_1 stetig ist, existiert dann aber ein $\varepsilon_2 > 0$, so daß

$\forall\, \delta \in [0,\varepsilon_2] : \quad \|H(x_i(s_1+\delta),\lambda_{i+1})\| \leq c$ und damit

$\forall\, \delta \in [0,\varepsilon_2] : \quad (x_i(s_1+\delta),\lambda_{i+1}) \in M(H,x_o,c)$.

Dies steht aber im Widerspruch zur Definition von s_1, so daß die Annahme (7.42) falsch ist. Somit gilt (7.41), woraus sich

(7.45) $N_2 \subset N_1$

ergibt.

Mit (4.14) ist demzufolge η_i bezüglich μ zumindest solange stetig, bis entweder $\mu = 1$ oder $\eta_i(\mu) = 2\,(q-d)$ erreicht ist.

Deshalb existiert stets ein μ_i mit (6.15) und (6.16), so daß x_{i+1} in Schritt 3 von EV1 wohldefiniert ist.

Wegen (6.15) ist dann

(7.46) $\mu_i \in N_2$

und mit (7.45) folglich auch

(7.47) $\mu_i \in N_1$,

so daß (7.22) gilt.

Aus $\mu_i \in N_1$ folgt mit (V3) und (4.16), daß

$K1(x_i,\lambda_{i+1}, x_i,\mu_i) \le \kappa$.

Falls $\mu_i < 1$ erhält man daraus zusammen mit (6.16) und (7.21) :

$$\varrho\ 2\ (q - d) \le \eta_i(\mu_i) \le \mu_i\ K1(x_i,\lambda_{i+1},\Delta x_i,\mu_i)\ \|\Gamma_i\|^2\ \|H(x_i,\lambda_{i+1})\|$$

$$\le \mu_i\ \kappa\ \bar{\beta}^2\ c\ ,$$

so daß auch (7.23) bewiesen ist.

Wegen (7.47) sind die Voraussetzungen von Hilfssatz VII.3 bei Wahl von K und T nach (7.36) bzw. (7.37) auch für $\bar{\mu}_i := \mu_i$ erfüllt, wobei sich wegen (7.46) in (B1) von Hilfssatz VII.3 $\tilde{\mu}_i = \mu_i$ ergibt. Aus (7.7) folgt damit speziell

$$\|H(x_{i+1},\lambda_{i+1})\| \le (1 - (1-q)\mu_i)\ \|H(x_i,\lambda_{i+1})\| .$$

Zusammen mit (7.23) ergibt sich daraus (7.24).

Nun zum Beweis von (B1)

Für $(x_{i_o},\lambda_{i_o}) \in M(H,x_o,c)$ mit $\|H(x_{i_o},\lambda_{i_o})\| \le \alpha\ c$ folgt mit (A), (B) und (C) induktiv, daß λ_i und x_i für alle $i \ge i_o$ nach EV1 wohldefiniert sind und den Eigenschaften (7.19) bis (7.24) genügen, denn die Voraussetzungen von (A) implizieren mit (7.20) für festes $i \ge i_o$ diejenigen von (B) und bei Wahl von Γ_i nach (B) auch die von (C), woraus mit (7.22) und (7.24) wiederum diejenigen von (A) für i+1 folgen.
Wegen $(x_o,0) \in M(H,x_o,c)$ mit $\|H(x_o,0)\| = 0$ ist deshalb EV1 wohldefiniert.

Es bleibt noch zu zeigen, daß EV1 lösungskonvergent ist.

Nach (7.19) ist $\Delta\lambda_i = 0$, falls $\lambda_i = 1$, so daß gilt

$$\lambda_{i_o} = 1 \implies \forall\ i \ge i_o :\ \lambda_i = 1 .$$

Ist deshalb $\lambda_{i_o} < 1$, so muß auch $\lambda_i < 1$ gelten für alle $i \le i_o$, d.h.

$$\forall\ i < i_o :\ \Delta\lambda_i \ne 1 - \lambda_i .$$

Wegen (7.19) ist dann

$\forall\ i < i_o :\ \underline{\delta} \le \Delta\lambda_i$, so daß mit $\lambda_o = 0$ folgt

$\forall\ i \le i_o :\ i\,\underline{\delta} \le \lambda_i < 1$.

Dies kann aber nur erfüllt sein, wenn $i_o < 1/\underline{\delta}$ erfüllt ist. Demzufolge muß $\lambda_i = 1$ gelten, wenn $i \ge 1/\underline{\delta}$ ist, so daß in EV1 nach endlich vielen Schritten (nämlich höchstens $[1/\underline{\delta} + 1]$ vielen) stets $\lambda_i = 1$ ist.

Sei also $i_o := [1/\underline{o} + 1]$.

Dann gilt nach (7.24) :

$\forall\ i \geq i_o : \quad \|F(x_{i+1})\| = \|H(x_{i+1},\lambda_{i+1})\| \leq \alpha\ \|H(x_i,\lambda_{i+1})\| = \alpha\ \|F(x_i)\|$,

woraus man induktiv

(7.48) $\quad \forall\ i \geq i_o : \quad \|H(x_i,\lambda_i)\| = \|F(x_i)\| \leq \alpha^{i-i_o}\ \|F(x_{i_o})\| \leq \alpha^{i-i_o}\ c$

folgern kann.

Damit gilt für $i \geq i_o$ und $j \in \mathbb{N}$:

$$\|x_{i+j} - x_i\| \leq \sum_{k=0}^{j-1} \|x_{i+k+1} - x_{i+k}\| = \sum_{k=0}^{j-1} \|\mu_{i+k}\,\Delta x_{i+k}\|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{j-1} \|\Delta x_{i+k}\| = \sum_{k=0}^{j-1} \|\Gamma_{i+k}\,F(x_{i+k})\|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\Gamma_{i+k}\|\ \|F(x_{i+k})\|$$

Mit (7.21) und (7.48) folgt damit weiter

$$\|x_{i+j} - x_i\| \leq \bar{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \|F(x_{i+k})\| \leq \bar{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{i+k-i_o}\ c = \bar{\beta}\ c\ \frac{\alpha^{i-i_o}}{1-\alpha}$$

Da α nach Definition kleiner als Eins ist, existiert somit zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ stets ein $i_1(\varepsilon)$ mit

$\forall\ i \geq i_1(\varepsilon)$, $j \in \mathbb{N}$: $\quad \|x_{i+j} - x_i\| \leq \varepsilon$.

Somit bildet $\{\, x_i \mid i \in \mathbb{N}_o \,\}$ eine Cauchy-Folge, die in dem Banachraum X gegen ein Element x^* konvergiert, das wegen (V1) in $M(H,x_o,c)$ liegt.

Wegen der Stetigkeit von H gilt mit (7.48) :

$$\|F(x^*)\| = \lim_{i\to\infty} \|H(x_i,\lambda_i)\| \leq \lim_{i\to\infty} \alpha^{i-i_o}\ c = 0 ,$$

so daß EV1 lösungskonvergent ist. ▲

VII.6 Bemerkungen

VII.6.1

Existiert eine offene Menge U mit $M(H,x_o,c) \subset U \subset D \times J$ und ist H auf U bezüglich x zweimal stetig Fréchet-differenzierbar mit

(7.49) $\forall\ (x,\lambda) \in M(H,x_o,c) : \quad \|H_{xx}(x,\lambda)\| \le \varkappa$,

so ist (V3) aus Satz VII.5 erfüllt mit jeder Funktion K1, für die

$$K1(x,\lambda,y,\mu) := \max_{t\in[0,\mu]} \|H_{xx}(x+ty,\lambda)\| \quad \text{falls} \quad \forall\ t \in [0,\mu] : (x+ty,\lambda) \in U.$$

VII.6.2

Wie im Beweis von Satz VII.5 gezeigt, ist in EV1 spätestens nach $i_o := [1/\underline{\delta} + 1]$ vielen Schritten stets $\lambda_i = 1$, wenn die Voraussetzungen von Satz VII.5 erfüllt sind. Das heißt, daß dann in EV1 für $i \ge i_o$ der Übergang von x_i zu x_{i+1} gemäß Schritt 3 ein gedämpftes Newton-ähnliches Verfahren für F der Form

(7.50) $\forall\ i \ge i_o : \quad x_{i+1} = x_i - \mu_i\, \Gamma_i\, F(x_i) \quad \text{mit} \quad \|I - F'(x_i)\,\Gamma_i\| \le d$

darstellt. Dabei wird für F nach (7.24) bzw. (7.48) in jedem Schritt mindestens eine Normreduktion um den Faktor α erreicht.

Nun existiert wegen $\alpha < 1$ sicher ein $i_1 \ge i_o$ mit

(7.51) $\varkappa\, \overline{\beta}^2\, c\, \alpha^{i_1 - i_o} < \rho\, 2\, (q - d)$.

Weil für alle vorkommenden Iterierten stets $\|K1(x_i,\lambda_{i+1},\Delta x_i,\mu_i)\|$ durch $\varkappa$ und $\|\Gamma_i\|$ durch $\overline{\beta}$ beschränkt ist, gilt

$$\forall\ i \ge i_o : \quad \eta_i(\mu) \le \varkappa\, \overline{\beta}^2\, c\, \alpha^{i - i_o} .$$

Zusammen mit (7.51) folgt daraus, daß in Schritt 3 von EV1 für $i \ge i_1$ (6.16) nicht erfüllt werden kann und folglich

$$\forall\ i \ge i_1 : \quad \mu_i = 1$$

gelten muß. Also geht die Zuordnung in Schritt 3 von EV1 für $i \ge i_1$ in ein ungedämpftes Newton-ähnliches Verfahren für F der Form

(7.52) $\forall\ i \ge i_1 : \quad x_{i+1} := x_i - \Gamma_i\, F(x_i) \quad \text{mit} \quad \|I - F'(x_i)\,\Gamma_i\| \le d$

über.

Für den Fall $d = 0$ ist (7.52) mit dem Newton-Verfahren identisch. Unter den Voraussetzungen von Satz VII.5 konvergiert dieses gegen eine Lösung x^* von $F(x) = 0$ mit $(x^*,1) \in M(H,x_o,c)$. Wegen $F(x^*) = 0$ und der Stetigkeit von $\|F(.)\|$ in x^* nach (V2) existiert damit zu $0 < c_o < c$ ein $r_o > 0$, so daß

$$\forall\ x \in S(x^*,r_o) : \quad \|F(x)\| \le c_o$$

und deshalb

$$(7.53) \quad \{ (x,1) \mid x \in S(x^*,r_o) \} \subset M(H,x_o,c) .$$

Zudem existiert wegen der Konvergenz der Folge $\{ x_i \mid i \in \mathbb{N} \}$ gegen x^* und (7.48) zu $r_1 < r_o/2$ ein $i_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$(7.54) \quad \forall\, i \geq i_2 : \quad x_i \in S(x^*,r_1) \quad \text{und} \quad \|F(x_i)\| \leq \min \{ \frac{r_1}{2\beta} , \frac{1}{2\beta^2\kappa} \} .$$

Falls nun $i \geq i_2$ und $F(x_i) \neq 0$, so gelten für x_i mit $r := r_1$ und den Konstanten β, $K := \kappa$ und $\zeta := \beta\|F(x_i)\|$ die Voraussetzungen von Satz IV.20. Mit (7.53) existiert nämlich nach (V2) von Satz VII.5 jeweils die koniare Inverse $F'^{-1}(x_i)$ von $F'(x_i)$ und es gilt:

(V0) wegen $S(x_i,r_1) \subset S(x^*,r_o)$ und (7.53),

(V2) wegen (V2) von Satz VII.5, da $(x_i,1) \in M(H,x_o,c)$,

(V1) wegen (V2) von Satz VII.5, da $\|F'^{-1}(x_i)\, F(x_i)\| \leq \beta\, \|F(x_i)\| = \zeta$,

(V3) unter Verwendung von (4.14) und (4.16) wegen (V3) von Satz VII.5 sowie wegen $S(x_i,r_1) \subset S(x^*,r_o)$ und (7.53),

(V4) da $\zeta\, \beta\, K = \beta^2\, \kappa\, \|F(x_i)\| \leq \frac{1}{2}$ nach (7.54) und

(V5) weil für $h \in (0,\frac{1}{2}]$:

$$\frac{1 - \sqrt{1-2h}}{h}\, \zeta \leq 2\zeta = 2\, \beta\, \|F(x_i)\| \leq r_1 \text{ nach (7.54)} .$$

Das bedeutet:
Wird in EV1 $d = 0$ gewählt und sind die Voraussetzungen von Satz VII.5 erfüllt, so ist die Zuordnungsvorschrift in Schritt 3 von EV1 nach endlich vielen Schritten identisch mit dem Newton-Verfahren für F. Falls nicht bereits nach endlich vielen Schritten $F(x_i) = 0$ gilt, so sind dabei dann nach ebenfalls endlich vielen Schritten für alle folgenden Iterierten die Voraussetzungen von Satz IV.20 erfüllt, und es können hierfür die dort angegebenen Fehlerabschätzungen (B4) und (B5) angewendet werden.

VII.6.3

Der bereits in V.8.1 angesprochene Existenz- und Ausführbarkeitssatz 2.2.1 von FEILMEIER - LORY - SCHEURING - WACKER aus [19] stellt eine zu Satz VII.5 vergleichbare Aussage dar, weil er sich ebenfalls auf ein Einbettungsverfahren bezieht, in dem das Newton-Verfahren stufenweise

als lokales Iterationsverfahren verwendet wird.

Zunächst ist festzustellen, daß die angegebenen Voraussetzungen von Satz 2.2.1 erheblich stärker sind als diejenigen von Satz VII.5, so daß EV1 unter den Voraussetzungen von Satz 2.2.1 stets auch ausführbar ist. Als Definitionsbereich für die grundlegende Abbildung F wird in Satz 2.2.1 der ganze Banachraum X unterstellt, so daß die zugehörige Einbettung H auf $X \times J$ definiert sein muß. Wie in Bemerkung V.4 festgestellt, ist dafür Voraussetzung (V1) von Satz VII.5 mit jedem $c \in \mathbb{R}_+$ erfüllt. In Satz 2.2.1 wird ferner die zweimalige stetige Differenzierbarkeit von H auf ganz $X \times J$ gefordert, wobei dort gleichzeitig die Existenz entsprechender Schranken D für $\|H''(x,\lambda)\|$ und R für $\|H_\lambda(x,\lambda)\|$ verlangt wird. Außerdem soll H_x auf ganz $X \times J$ eine durch N beschränkte koniare Inverse besitzen. Damit ist bezüglich $M(H,x_o,c) \subset X \times J$ die Regularität von H mit der Regularitätskonstanten N gesichert, so daß (V2) von Satz VII.5 gültig ist. Außerdem ist auch (V3) und (V4) von Satz VII.5 erfüllt, wenn man auf $M(H,x_o,c)$ bezüglich (V3) die konstante Lipschitzfunktion $K1 \equiv D$ betrachtet und bezüglich (V4) für $\|H_\lambda(x,\lambda)\|$ die Schranke R verwendet.

Gemäß Satz V.1 kann neben der Ausführbarkeit von EV1 aus den Voraussetzungen von Satz 2.2.1 ebenfalls die Existenz einer stetigen Lösung der Einbettung H gefolgert werden, so daß mit den Sätzen dieser Arbeit gleichwertige Aussagen zu Satz 2.2.1 von FEILMEIER - LORY - SCHEURING - WACKER unter abgeschwächten Voraussetzungen geboten werden.

Zudem ist zu berücksichtigen, daß der Durchführbarkeitsbegriff aus [19] nicht mit demjenigen der Ausführbarkeit in dieser Arbeit übereinstimmt. Der Begriff der Durchführbarkeit macht es erforderlich, auf jeder Stufe des Einbettungsverfahrens (d.h. für jedes $\lambda_i \in [0,1]$) die lokale Iteration durch das Newton-Verfahren im Rahmen der vorhandenen Rechengenauigkeit bis zur lokalen Lösung $x(\lambda_i)$ auszuiterieren um dann bei vergrößertem λ_{i+1} mit dieser Lösung als Ausgangsnäherung den nächsten Iterationszyklus zu starten. Bei Durchführung des in [19] vorgesehenen Verfahrens ist man somit gezwungen, die jeweiligen lokalen Lösungen $x(\lambda_i)$ mit einer Genauigkeit zu bestimmen, die in bezug auf die gesuchte Lösung $x(1)$ eigentlich nicht von Interesse ist.

Außerdem orientiert sich die jeweils zulässige (äquidistante) Schritt-

weite $\Delta\lambda_i$ des in [19] angegebenen Einbettungsverfahrens an den für den ganzen Raum gültigen globalen Konstanten für Regularität von H und Lipschitzeigenschaft bezüglich H_x. Somit ist nicht nur der lokale Aufwand zur Bestimmung von $x(\lambda_i)$ unnötig hoch, sondern es sind zusätzlich auch die λ - Schrittweiten erheblich kleiner, als in Hinsicht auf die lokalen Gegebenheiten erforderlich.

Demgegenüber kann nach EV1 die durch jeden Newton-Schritt mit der Norm-Reduktion erreichte Annäherung an die jeweilige lokale Lösung zu einer entsprechenden Vergrößerung des Einbettungsparameters λ genutzt werden. Dabei kann die λ - Schrittweite in jedem Schritt optimal gewählt werden, da auf die Bestimmung der Schrittweite $\Delta\lambda$ nur die gültigen lokalen Konstanten Einfluß ausüben.

VIII. AUSFÜHRBARKEITSAUSSAGEN FÜR EV2

In diesem Kapitel werden für EV2 zwei Ausführbarkeitssätze nachgewiesen. Die Voraussetzungen des einen Satzes (VIII.6) sind nahezu identisch mit denen von Satz VII.5. Es ist lediglich in (V3) die Lipschitzbedingung $L1(M(H,x_0,c))$ durch die EV2 besser angepaßte Lipschitzbedingung $L2(M(H,x_0,c))$ ersetzt. Berücksichtigt man (4.20), so sind somit in diesem Satz Voraussetzungen angegeben, unter denen sowohl EV1 als auch EV2 ausführbar ist. Der zweite Ausführbarkeitssatz (Satz VIII.8) geht auf die wesentlichen Eigenschaften von EV2 besser ein, denn in seinen Voraussetzungen ist die Regularitätsforderung an H abgeschwächt. Es ist hierin insbesondere ausreichend, wenn zu einer in $M(H,x_0,c)$ eindeutig bestimmten Lösung x der Einbettung H die koniare Inverse von H_y in allen Punkten $(x(\lambda),\lambda)$ zu $\lambda \in [0,1]$ existiert. Diese abgeschwächte Voraussetzung trägt der Tatsache Rechnung, daß EV2 Singularitäten von H_x in $M(H,x_0,c)$ umgeht, wenn diese abseits der Lösung liegen.

Neben den beiden Ausführbarkeitssätzen wird außerdem ein Satz über die Wohldefiniertheit von EV2 angegeben (Satz VIII.5). Dies ist sinnvoll, weil die Voraussetzungen zur Wohldefiniertheit schwächer sind, als diejenigen für die Ausführbarkeit. Außerdem kann dieser Satz zum Nachweis der Ausführbarkeit in Satz VIII.6 und Satz VIII.8 mitverwendet werden.

Zur Vorbereitung der Beweise zu den oben angeführten Sätzen werden zunächst wiederum einige Hilfsaussagen zusammengestellt.

VIII.1 Hilfssatz

Es sei H eine Einbettung für F bezüglich x_0, $x_i \in D$, $\lambda_i \in [0,1)$ und $\lambda_{i+1} \in [\lambda_i,1]$.

Es gelte

(V1) $\forall\, \lambda \in [\lambda_i,\lambda_{i+1}]$: $(x_i,\lambda) \in M(H,x_0,c)$

(V2) $\forall\, \lambda \in [\lambda_i,\lambda_{i+1}]$: H ist bei (x_i,λ) stetig Fréchet-differenzierbar und zu $H_x(x_i,\lambda)$ existiert die koniare Inverse $H_x^{-1}(x_i,\lambda)$

(V3) H_x erfüllt die Lipschitzbedingung $L2(M(H,x_0,c))$

(B1) Dann gilt:
Verwendet man in EV2 die nach (V3) existierende Lipschitzfunktion K2, so sind die durch (6.19), (6.21) und (6.22) definierten Funktionen β_i, ζ_i und η_i auf $[\lambda_i,\lambda_{i+1}]$ wohldefiniert und stetig.

Beweis:

Wegen (V1) und (V2) existiert für $\lambda \in [\lambda_i,\lambda_{i+1}]$ sowohl $H(x_i,\lambda)$ als auch $H_x^{-1}(x_i,\lambda)$, so daß $\Delta x_i(\lambda)$, $\zeta_i(\lambda)$ und $\beta_i(\lambda)$ dort wohldefiniert sind. (V3) sichert zudem die Existenz einer Lipschitzfunktion K2, in deren Definitionsbereich $\{x_i\} \times [\lambda_i,\lambda_{i+1}] \times \mathbb{R}_+^0$ enthalten ist. Demzufolge ist auch $\eta_i(\lambda)$ bei Verwendung von K2 auf $[\lambda_i,\lambda_{i+1}]$ wohldefiniert.

Sei nun $(x_i,\bar\lambda) \in \{x_i\} \times [\lambda_i,\lambda_{i+1}]$ fest und $\varepsilon > 0$ beliebig.

Wegen (V2) existiert $H_x^{-1}(x_i,\bar\lambda)$. Es sei $s := \|H_x^{-1}(x_i,\bar\lambda)\|$.

Wegen der Stetigkeit von H_x auf $\{x_i\} \times [\lambda_i,\lambda_{i+1}]$ nach (V2) existiert dann ein $\delta(\varepsilon) > 0$, so daß

$$\|H_x(x_i,\lambda) - H_x(x_i,\bar\lambda)\| \le \frac{\varepsilon}{s(s+\varepsilon)} \quad \text{falls } \lambda \in [\lambda_i,\lambda_{i+1}] \text{ und } |\lambda - \bar\lambda| \le \delta(\varepsilon) .$$

Für $\lambda \in [\lambda_i,\lambda_{i+1}]$ mit $|\lambda - \bar\lambda| \le \delta(\varepsilon)$ gilt damit

$$(8.1) \quad \|H_x^{-1}(x_i,\bar\lambda)\,(H_x(x_i,\lambda) - H_y(x_i,\bar\lambda))\| \le s\,\|H_x(x_i,\lambda) - H_x(x_i,\bar\lambda)\|$$

$$\le s\,\frac{\varepsilon}{s(s+\varepsilon)} = \frac{\varepsilon}{s+\varepsilon} =: q < 1 .$$

Setzt man nun $T_1 := H_x(x_i,\bar\lambda)$ und $T_2 := H_x(x_i,\lambda)$, so sind hierfür wegen (V2) bzw. (8.1) die Voraussetzungen (V1) und (V2) von Satz IV.17 erfüllt.

Gemäß (4.25) gilt damit:

$$\|H_x^{-1}(x_i,\lambda) - H_x^{-1}(x_i,\bar\lambda)\| \le \frac{q}{1-q}\,\|H_x(x_i,\bar\lambda)\| = \frac{\frac{\varepsilon}{s+\varepsilon}}{1 - \frac{\varepsilon}{s+\varepsilon}}\,s = \varepsilon .$$

Also ist $H_x^{-1}(x_i,.)$ stetig in $\bar\lambda$ und damit auch β_i, ζ_i und η_i . ▲

VIII.2 Hilfssatz

Es sei H eine Einbettung für F bezüglich x_o, $c \in \mathbb{R}_+$, $x_i \in D$ und $\lambda_{i+1} \in [0,1]$.

Es gelte

(V1) $M(H,x_0,c)$ ist abgeschlossen

(V2) i) H ist auf einer offenen Umgebung U_1 von $M(H,x_0,c)$ stetig Fréchet-differenzierbar

ii) Es existiert $H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1}) \in L(Z,X)$

(V3) H_x erfüllt die Lipschitzbedingung $L2(M(H,x_0,c))$

(V4) $(x_i,\lambda_{i+1}) \in M(H,x_0,c)$

(V5) Bildet man $\eta_i(\lambda_{i+1})$ zu (x_i,λ_{i+1}) nach (6.22), so gilt

$$\eta_i(\lambda_{i+1}) \leq \frac{1}{2} .$$

Dann folgt:

(B1) Setzt man für $\mu \in [0,1]$

(8.2) $$x_i(\mu) := x_i - \mu H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})\, H(x_i,\lambda_{i+1}) ,$$

so gilt

(8.3) $$\forall\, \mu \in [0,1] : \quad (x_i(\mu),\lambda_{i+1}) \in M(H,x_0,c)$$

(8.4) $$\forall\, \mu \in [0,1] :$$

$$\|H(x_i(\mu),\lambda_{i+1}) - H(x_i,\lambda_{i+1}) - H_x(x_i,\lambda_{i+1})\,(x_i(\mu) - x_i)\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\, \mu^2\, \zeta_i(\lambda_{i+1})^2$$

(8.5) $$\forall\, \mu \in [0,1] : \quad \|H(x_i(\mu),\lambda_{i+1})\| \leq (1 - \tfrac{3}{4}\mu)\, \|H(x_i,\lambda_{i+1})\|$$

Beweis:

Wegen $(x_i,\lambda_{i+1}) \in D \times J$ und (V2) existiert sowohl $H(x_i,\lambda_{i+1})$ als auch $H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})$, so daß $\eta_i(\lambda_{i+1})$ in (V5) und $x_i(\mu)$ in (B1) wohldefiniert sind.

Nach (V3) und Definition IV.15 existiert in $D \times J$ eine offene Umgebung U_2 von $M(H,x_0,c)$, auf der H_x mit einer geeigneten Lipschitzfunktion K2 bezüglich x die Lipschitzeigenschaft (4.17) erfüllt.

Es sei $U := U_1 \cap U_2$. Dann gilt:

(8.6) U ist offen mit $M(H,x_0,c) \subset U \subset D \times J$

(8.7) H ist auf U stetig Fréchet-differenzierbar

(8.8) H_x erfüllt mit der Lipschitzfunktion K2 auf U bezüglich x die Lipschitzeigenschaft (4.17) .

Wegen $(x_i,\lambda_{i+1}) \in M(H,x_0,c) \subset U$ und U offen folgt unter Beachtung von (8.2):

(8.9) $\quad \exists\, \bar{\mu}_i \in (0,1]\ \forall\, \mu \in [0,\bar{\mu}_i] : \quad (x_i(\mu),\lambda_{i+1}) \in U,$

so daß

(8.10) $\quad M_i := \{\, \bar{\mu}_i \in (0,1] \mid \forall\, \mu \in [0,\bar{\mu}_i] : \ (x_i(\mu),\lambda_{i+1}) \in U \,\} \neq \emptyset\ .$

Betrachtet man ein beliebiges festes $\bar{\mu}_i \in M_i$, so gilt wegen (8.8) mit (4.14), daß

(8.11) $\quad \forall\, \mu \in [0,\bar{\mu}_i] : \quad \|H_x(x_i(\mu),\lambda_{i+1}) - H_x(x_i,\lambda_{i+1})\| \leq$

$$\leq K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\ \|x_i(\mu) - x_i\|$$

$$= K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\ \mu\ \|\zeta_i(\lambda_{i+1})\|\ .$$

Definiert man nun $T : D \to Z$ vermöge

(8.12) $\quad T(x) := H(x,\lambda_{i+1}) \qquad$, sowie

(8.13) $\quad \Gamma_i := H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})\ ,$

(8.14) $\quad y_i := \Gamma_i\, T(x_i) = H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})\, H(x_i,\lambda_{i+1}) \quad$ und

(8.15) $\quad \forall\, \mu \in [0,\bar{\mu}_i] : \quad K(x_i,y_i,\mu) := K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\ ,$

so sind hierfür bezüglich x_i und $\bar{\mu}_i$ die Voraussetzungen von Hilfssatz VII.1 und mit $d := 0$ und $q := \frac{1}{4}$ auch diejenigen von Hilfssatz VII.3 erfüllt.

Es gilt nämlich:
(V1) nach (8.10) und (8.6)
(V2) nach (8.10) und (8.7)
(V3) nach (8.15) und (8.11)
(V4) nach (8.12) wegen der durch (V2) ii) gegebenen Existenz von $H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1}) \in L(Z,X)$
(V5) nach (8.13) und (8.12).

Aus (B1) von Hilfssatz VII.1 folgt damit

(8.16) $\quad \forall\, \mu \in [0,\bar{\mu}_i] : \quad \|T(x_i(\mu)) - T(x_i) - T'(x_i)\,(x_i(\mu) - x_i)\| =$

$$= \|H(x_i(\mu),\lambda_{i+1}) - H(x_i,\lambda_{i+1}) - H_x(x_i,\lambda_{i+1})\,(x_i(\mu) - x_i)\|$$

$$\leq \frac{1}{2}\, K(x_i,y_i,\mu)\ \|x_i(\mu) - x_i\|^2$$

$$= \frac{1}{2}\, K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\ \mu^2\ \zeta_i(\lambda_{i+1})^2\ .$$

Weil $\eta_i(\lambda_{i+1}) \leq \frac{1}{2}$ nach (V5) erhält man für $\mu_o \in [0,\bar{\mu}_i]$ und $\mu \in [0,\mu_o]$:

$$\mu\, K(x_i,y_i,\mu)\, \|\Gamma_i\|\, \|\Gamma_i\, T(x_i)\| =$$

$$= \mu\, K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\, \|H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})\|\, \|H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})\, H(x_i,\lambda_{i+1})\|$$

$$= \mu\, K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\, \beta_i(\lambda_{i+1})\, \zeta_i(\lambda_{i+1})$$

$$= \mu\, \eta_i(\lambda_{i+1}) \leq \frac{1}{2} = 2\,(q-d)\,.$$

Deshalb gilt (B1) von Hilfssatz VII.3 mit $\tilde{\mu}_i = \bar{\mu}_i$ und folglich mit (7.7):

(8.17) $\forall\, \mu \in [0,\bar{\mu}_i]$: $\|H(x_i(\mu),\lambda_{i+1})\| \leq (1 - \frac{3}{4}\mu)\, \|H(x_i,\lambda_{i+1})\|$.

Daraus folgt

(8.18) $\forall\, \mu \in [0,\bar{\mu}_i]$: $(x_i(\mu),\lambda_{i+1}) \in M(H,x_o,c)$.

Setzt man nun

(8.19) $m_i := \sup\{\, \bar{\mu} \in [0,1] \mid \forall\, \mu \in [0,\bar{\mu}] : (x_i(\mu),\lambda_{i+1}) \in M(H,x_o,c)\}$,

so ist wegen (8.18) und (8.10) sicher $m_i > 0$.

Da $M(H,x_o,c)$ nach (V1) abgeschlossen und $x_i(.)$ in μ stetig ist, erhält man

(8.20) $\forall\, \mu \in [0,m_i]$: $(x_i(\mu),\lambda_{i+1}) \in M(H,x_o,c)$.

Wegen (8.6) und (8.20) liegt $[0,m_i]$ in M_i, so daß hierfür außerdem gemäß (8.16) und (8.17) gilt:

(8.21) $\forall\, \mu \in [0,m_i]$:

$$\|H(x_i(\mu),\lambda_{i+1}) - H(x_i,\lambda_{i+1}) - H_x(x_i,\lambda_{i+1})\,(x_i(\mu) - x_i)\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\, K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\, \mu^2\, \zeta_i(\lambda_{i+1})^2 \qquad \text{und}$$

(8.22) $\forall\, \mu \in [0,m_i]$: $\|H(x_i(\mu),\lambda_{i+1})\| \leq (1 - \frac{3}{4}\mu)\, \|H(x_i,\lambda_{i+1})\|$.

Folglich ist (B1) nachgewiesen, wenn $m_i = 1$ gezeigt werden kann.

Angenommen, es sei $m_i < 1$.

Wegen (8.22) gilt dann:

$$\|H(x_i(m_i),\lambda_{i+1})\| \leq (1 - \tfrac{3}{4}\, m_i)\, \|H(x_i,\lambda_{i+1})\| \leq (1 - \tfrac{3}{4}\, m_i)\, c\,.$$

Wegen der Stetigkeit von $H(.,\lambda_{i+1})$ in x und derjenigen von $x_i(.)$ in μ folgt daraus die Existenz eines $\delta_i > 0$ mit

$\forall\ \mu \in [m_i, m_i+\delta_i] : \quad \|H(x_i(\mu),\lambda_{i+1})\| \le c$.

Das bedeutet aber, daß dann auch

$\forall\ \mu \in [m_i, m_i+\delta_i] : \quad (x_i(\mu),\lambda_{i+1}) \in M(H,x_o,c)$,

was im Widerspruch zur Wahl von m_i steht.

Also muß $m_i = 1$ gelten, so daß (B1) aus (8.20), (8.21) und (8.22) folgt. ▲

VIII.3 Hilfssatz

Es sei H eine Einbettung für F bezüglich x_o, $c \in \mathbb{R}_+$, $x_i \in D$ und $\lambda_{i+1} \in [0,1]$.

Es gelte

(V1) $M(H,x_o,c)$ ist abgeschlossen

(V2) i) H ist auf einer offenen Umgebung U_1 von $M(H,x_o,c)$ stetig Fréchet-differenzierbar

ii) Es existiert $H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1}) \in L(Z,X)$

(V3) H_x erfüllt die Lipschitzbedingung $L2(M(H,x_o,c))$

(V4) $(x_i,\lambda_{i+1}) \in M(H,x_o,c)$

(V5) Bildet man $\eta_i(\lambda_{i+1})$ zu (x_i,λ_{i+1}) nach (6.22), so gilt $\eta_i(\lambda_{i+1}) \le \frac{1}{2}$.

Setzt man dann $x_{i,o} := x_i$ und für alle $k \in \mathbb{N}_o$:

(8.23) $x_{i,k+1} := x_{i,k} - H_x^{-1}(x_{i,k},\lambda_{i+1})\ H(x_{i,k},\lambda_{i+1})$

(8.24) $\beta_{i,k} := \|H_x^{-1}(x_{i,k},\lambda_{i+1})\|$

(8.25) $\zeta_{i,k} := \|H_x^{-1}(x_{i,k},\lambda_{i+1})\ H(x_{i,k},\lambda_{i+1})\|$

(8.26) $\eta_{i,k} := \beta_{i,k}\ \zeta_{i,k}\ K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))$

(8.27) $\tilde{x}_{i,k+1}(\mu) := x_{i,k} + \mu\ (x_{i,k+1} - x_{i,k})$ und

(8.28) $[(x_{i,k},\lambda_{i+1}),(x_{i,k+1},\lambda_{i+1})] := \{\ (\tilde{x}_{i,k+1}(\mu),\lambda_{i+1}) \mid \mu \in [0,1]\}$,

so gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$(B1)_k$ $x_{i,k}$ ist wohldefiniert

$(B2)_k$ $[(x_{i,k-1},\lambda_{i+1}),(x_{i,k},\lambda_{i+1})] \subset M(H,x_o,c) \cap S(x_i,2\zeta_i(\lambda_{i+1})) \times \{\lambda_{i+1}\}$

$(B3)_k$ Es existiert $H_x^{-1}(x_{i,k},\lambda_{i+1}) \in L(Z,X)$ und

$$\|H_x^{-1}(x_{i,k},\lambda_{i+1})\| = \beta_{i,k} \le 2\,\beta_{i,k-1} \le 2^k\,\beta_{i,o} = 2^k\,\|H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})\|$$

$(B4)_k$
$$\|H(x_{i,k},\lambda_{i+1})\| \le \tfrac{1}{2}\,K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\,\zeta_{i,k-1}^2$$
$$\le \tfrac{1}{4}\,\|H(x_{i,k-1},\lambda_{i+1})\|$$
$$\le \frac{1}{4^k}\,\|H(x_i,\lambda_{i+1})\|$$

$(B5)_k$ $\zeta_{i,k} \le \tfrac{1}{2}\,\zeta_{i,k-1} \le \frac{1}{2^k}\,\zeta_{i,o} = \frac{1}{2^k}\,\zeta_i(\lambda_{i+1})$

$(B6)_k$ $\eta_{i,k} \le \tfrac{1}{2}$

Außerdem gilt:

(B7) Die Folge $\{(x_{i,k},\lambda_{i+1}) \mid k \in \mathbb{N}_o\}$ bildet eine Cauchy-Folge, die in $M(H,x_o,c) \cap \overline{S}(x_i,2\zeta_i(\lambda_{i+1})) \times \{\lambda_{i+1}\}$ gegen eine Lösung $(x^*(\lambda_{i+1}),\lambda_{i+1})$ der Gleichung $H(x,\lambda_{i+1}) = 0$ konvergiert.

(B8) $\|H_x(x^*(\lambda_{i+1}),\lambda_{i+1}) - H_x(x_i,\lambda_{i+1})\| \le K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\,2\zeta_i(\lambda_{i+1})$

Beweis:

Zunächst $(B1)_k$ bis $(B6)_k$ durch Induktion über k:

Induktionsanfang (k = 1)

$(B1)_1$: Wegen $(x_i,\lambda_{i+1}) \in D \times J$ und (V2) ii) existiert $H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})\,H(x_i,\lambda_{i+1})$, so daß $x_{i,1}$ wohldefiniert ist

$(B2)_1$: Per Definition gilt

$$\|x_{i,1} - x_{i,o}\| = \|x_{i,1} - x_i\| = \|H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})\,H(x_i,\lambda_{i+1})\| = \zeta_i(\lambda_{i+1}),$$

so daß sicher

$$[(x_{i,o},\lambda_{i+1}),(x_{i,1},\lambda_{i+1})] \subset S(x_i,2\zeta_i(\lambda_{i+1})) \times \{\lambda_{i+1}\}\ .$$

Es bleibt somit noch zu zeigen, daß

$$[(x_{i,o},\lambda_{i+1}),(x_{i,1},\lambda_{i+1})] \subset M(H,x_o,c)\ .$$

Hierzu wird Hilfssatz VIII.2 herangezogen.
Für $\mu \in [0,1]$ ist definitionsgemäß $\tilde{x}_{i,1}(\mu)$ nach (8.27) identisch

mit $x_i(\mu)$ nach (8.2). Da die Voraussetzungen von Hilfssatz VIII.2 mit denen von Hilfssatz VIII.3 übereinstimmen, folgt deshalb

$$\forall\ \mu \in [0,1]: \quad (x_{i,1}(\mu),\lambda_{i+1}) = (x_i(\mu),\lambda_{i+1}) \in M(H,x_o,c)$$

nach (8.3)

$(B3)_1$: Aus der soeben gezeigten Gültigkeit von (8.3) folgt, daß die gesamte Verbindungsstrecke zwischen (x_i,λ_{i+1}) und $(x_{i,1},\lambda_{i+1})$ in $M(H,x_o,c) \cap S(x_i,2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\times\{\lambda_{i+1}\}$ liegt. Deshalb kann diesbezüglich die durch (V3) auf $M(H,x_o,c)$ gesicherte Lipschitzeigenschaft (4.17) für H_x zu der Abschätzung

$$\|H_x(x_{i,1},\lambda_{i+1}) - H_x(x_i,\lambda_{i+1})\| \le K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\ \zeta_i(\lambda_{i+1}) \tag{8.29}$$

herangezogen werden.

Zum Nachweis von $(B3)_1$ wird nun Satz IV.17 (Banach-Lemma) angewendet.

Es gilt:

(V1): $T_1 := H_x(x_i,\lambda_{i+1})$ besitzt nach (V2) ii) eine koniare Inverse

(V2): Mit $q := \frac{1}{2}$ und $T_2 := H_x(x_{i,1},\lambda_{i+1})$ gilt unter Verwendung von (8.29) und (V5):

$$\begin{aligned}\|T_1^{-1}(T_2 - T_1)\| &= \|H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})\ (H_x(x_{i,1},\lambda_{i+1}) - H_x(x_i,\lambda_{i+1}))\| \\ &\le \beta_i(\lambda_{i+1})\ K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\ \zeta_i(\lambda_{i+1}) \\ &= \eta_i(\lambda_{i+1}) \\ &\le \frac{1}{2} = q\end{aligned}$$

Nach (B1) von Satz IV.17 existiert damit $H_x^{-1}(x_{i,1},\lambda_{i+1}) \in L(Z,X)$ und mit (4.26) gilt:

$$\beta_{i,1} = \|H_x^{-1}(x_{i,1},\lambda_{i+1})\| \le 2\ \|H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})\| = 2\ \beta_{i,o}\ .$$

$(B4)_1$: folgt unmittelbar aus Hilfssatz VIII.2, wenn man (8.4) mit $\mu = 1$ betrachtet. Nach (8.2) bzw. (8.23) ist nämlich

$$\begin{aligned}&H(x_i,\lambda_{i+1}) + H_x(x_i,\lambda_{i+1})\ (x_i(1) - x_i) = \\ &= H(x_i,\lambda_{i+1}) + H_x(x_i,\lambda_{i+1})\ (x_{i,1} - x_i) = 0\ ,\end{aligned}$$

so daß

$$\begin{aligned}&\|H(x_{i,1},\lambda_{i+1})\| = \\ &= \|H(x_{i,1},\lambda_{i+1}) - H(x_i,\lambda_{i+1}) - H_x(x_i,\lambda_{i+1})\ (x_{i,1} - x_i)\| \le\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2}\, K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\ \zeta_i(\lambda_{i+1})^2$$

$$= \frac{1}{2}\, K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\ \zeta_{i,o}^2 \ .$$

Wegen

$$\zeta_{i,o} \leq \|H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})\|\ \|H(x_i,\lambda_{i+1})\| = \beta_{i,o}\ \|H(x_i,\lambda_{i+1})\|$$

folgt daraus unter Verwendung von (V5) weiter:

$$\begin{aligned}\|H(x_{i,1},\lambda_{i+1})\| &\leq \frac{1}{2}\, K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\ \beta_{i,o}\ \zeta_{i,o}\ \|H(x_i,\lambda_{i+1})\| \\ &\leq \frac{1}{2}\ \eta_{i,o}\ \|H(x_i,\lambda_{i+1})\| \\ &= \frac{1}{2}\ \eta_i(\lambda_{i+1})\ \|H(x_i,\lambda_{i+1})\| \\ &\leq \frac{1}{4}\ \|H(x_i,\lambda_{i+1})\| \ .\end{aligned}$$

$(B5)_1$: Unter Berücksichtigung von $(B3)_1$, $(B4)_1$ und (V5) gilt:

$$\begin{aligned}\zeta_{i,1} &= \|H_x^{-1}(x_{i,1},\lambda_{i+1})\ H(x_{i,1},\lambda_{i+1})\| \leq \beta_{i,1}\ \|H(x_{i,1},\lambda_{i+1})\| \\ &\leq 2\ \beta_i(\lambda_{i+1})\ \frac{1}{2}\, K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\ \zeta_{i,o}^2 \\ &= \eta_i(\lambda_{i+1})\ \zeta_i(\lambda_{i+1}) \\ &\leq \frac{1}{2}\ \zeta_i(\lambda_{i+1}) = \frac{1}{2}\ \zeta_{i,o} \ .\end{aligned}$$

$(B6)_1$: Mit $(B3)_1$, $(B5)_1$ und (V5) erhält man

$$\begin{aligned}\eta_{i,1} &= \beta_{i,1}\ \zeta_{i,1}\ K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1})) \\ &\leq 2\ \beta_i(\lambda_{i+1})\ \frac{1}{2}\ \zeta_i(\lambda_{i+1})\ K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1})) \\ &= \eta_i(\lambda_{i+1}) \\ &\leq \frac{1}{2} \ .\end{aligned}$$

Induktionsschluß

Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest. Die Aussagen von Hilfssatz VIII.3 seien richtig für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Dann ist zu zeigen, daß sie auch für $k = n+1$ gelten.

$(B1)_{n+1}$: Gemäß $(B2)_n$ liegt $(x_{i,n},\lambda_{i+1})$ in $M(H,x_o,c) \subset D \times J$, so daß $H(x_{i,n},\lambda_{i+1})$ definiert ist.

Nach $(B3)_n$ existiert außerdem auch $H_x^{-1}(x_{i,n},\lambda_{i+1}) \in L(Z,X)$, so daß $H_x^{-1}(x_{i,n},\lambda_{i+1})\, H(x_{i,n},\lambda_{i+1})$ und damit auch $x_{i,n+1}$ wohldefiniert ist.

$(B2)_{n+1}$: Nach Induktionsannahme gilt $(B5)_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \le n$. Daraus folgt:

$\forall\, \mu \in [0,1]$:

$$\|\tilde{x}_{i,n+1}(\mu) - x_i\| \le \|\tilde{x}_{i,n+1}(\mu) - x_{i,n}\| + \|x_{i,n} - x_i\|$$

$$\le \sum_{k=0}^{n} \zeta_{i,k} \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\, \zeta_i(\lambda_{i+1}) < 2\, \zeta_i(\lambda_{i+1}) .$$

Somit ist $\forall\, \mu \in [0,1]$:

$(\tilde{x}_{i,n+1}(\mu),\lambda_{i+1}) \in S(x_i, 2\zeta_i(\lambda_{i+1})) \times \{\lambda_{i+1}\}$ und damit

$[(x_{i,n},\lambda_{i+1}),(x_{i,n+1},\lambda_{i+1})] \subset S(x_i, 2\zeta_i(\lambda_{i+1})) \times \{\lambda_{i+1}\}$.

Die Tatsache, daß auch $[(x_{i,n},\lambda_{i+1}),(x_{i,n+1},\lambda_{i+1})] \subset M(H,x_o,c)$, kann man wiederum nachweisen, indem man Hilfssatz VIII.2 für $(x_{i,n},\lambda_{i+1})$ anwendet.

(V1), (V2) i) und (V3) sind bei Hilfssatz VIII.2 und VIII.3 identisch. Nach $(B3)_n$ existiert $H_x^{-1}(x_{i,n},\lambda_{i+1}) \in L(Z,X)$, so daß auch (V2) ii) von Hilfssatz VIII.2 erfüllt ist.
Nach $(B2)_n$ ist ferner $(x_{i,n},\lambda_{i+1}) \in M(H,x_o,c)$, so daß hierfür (V4) von Hilfssatz VIII.2 erfüllt ist.
Für (V5) von Hilfssatz VIII.2 ist zu $(x_{i,n},\lambda_{i+1})$ gemäß (6.22) die Größe

$$\eta := \beta_{i,n}\, \zeta_{i,n}\, K2(x_{i,n},\lambda_{i+1},2\zeta_{i,n})$$

zu betrachten.
Es sei $x \in \overline{S}(x_{i,n},2\zeta_{i,n})$.

Berücksichtigt man dann $(B5)_k$ für $k \le n$, so gilt:

$$\|x - x_i\| \le \|x - x_{i,n}\| + \|x_{i,n} - x_i\|$$

$$\le 2\,\zeta_{i,n} + \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_{i,k} \le \frac{1}{2^{n-1}}\, \zeta_i(\lambda_{i+1}) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}\, \zeta_i(\lambda_{i+1}$$

$$= \zeta_i(\lambda_{i+1})\, (\frac{1}{2^{n-1}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}) = 2\, \zeta_i(\lambda_{i+1}) .$$

Also ist $\overline{S}(x_{i,n},2\zeta_{i,n}) \subset \overline{S}(x_i,2\zeta_i(\lambda_{i+1}))$.

Nach (4.18) ist deshalb

(8.30) $K2(x_{i,n},\lambda_{i+1},2\zeta_{i,n}) \le K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))$,

so daß

$$\eta = \beta_{i,n}\,\zeta_{i,n}\,K2(x_{i,n},\lambda_{i+1},2\zeta_{i,n}) \le \beta_{i,n}\,\zeta_{i,n}\,K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1})) = \eta_{i,n} .$$

Weil $\eta_{i,n} \le \frac{1}{2}$ nach $(B5)_n$, ist somit (V5) von Hilfssatz VIII.2 zu $(x_{i,n},\lambda_{i+1})$ erfüllt.

Aus (8.3) kann man demzufolge schließen, daß

$$\forall\ \mu \in [0,1]: \quad (\tilde{x}_{i,n+1}(\mu),\lambda_{i+1}) \in M(H,x_o,c) .$$

Damit ist $(B2)_{n+1}$ nachgewiesen.

$(B3)_{n+1}$: Weil die Verbindungsstrecke zwischen $(x_{i,n},\lambda_{i+1})$ und $(x_{i,n+1},\lambda_{i+1})$ in $M(H,x_o,c) \cap S(x_i,2\zeta_i(\lambda_{i+1})) \times \{\lambda_{i+1}\}$ liegt, kann man gemäß der durch (V3) auf $M(H,x_o,c)$ gesicherten Lipschitzeigenschaft (4.17) für H_x wiederum schließen, daß

$$\|H_x(x_{i,n+1},\lambda_{i+1}) - H_x(x_{i,n},\lambda_{i+1})\| \le K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\,\zeta_{i,n} .$$

Dies ermöglicht den Nachweis von $(B3)_{n+1}$ durch Anwendung von Satz IV.17 (Banach-Lemma).
Dabei ist $T_1 := H_x(x_{i,n},\lambda_{i+1})$, $T_2 := H_x(x_{i,n+1},\lambda_{i+1})$ und $q := \frac{1}{2}$ zu setzen.
Es gilt dann
(V1): T_1 besitzt nach $(B3)_n$ eine koniare Inverse
(V2): $\|T_1^{-1}(T_2 - T_1)\| =$

$$= \|H_x^{-1}(x_{i,n},\lambda_{i+1})\,(H_x(x_{i,n+1},\lambda_{i+1}) - H_x(x_{i,n},\lambda_{i+1}))\|$$

$$\le \beta_{i,n}\,K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\,\zeta_{i,n} \quad \text{nach (8.30)}$$

$$= \eta_{i,n} \le \tfrac{1}{2} = q \quad \text{nach } (B5)_n .$$

Nach (B1) von Satz IV.17 existiert damit $H_x^{-1}(x_{i,n+1},\lambda_{i+1})$ und mit (4.26) gilt

$$\beta_{i,n+1} = \|H_x^{-1}(x_{i,n+1},\lambda_{i+1})\| \le 2\,\|H_x^{-1}(x_{i,n},\lambda_{i+1})\| = 2\,\beta_{i,n} .$$

Wegen $(B3)_n$ folgt weiter, daß $2\,\beta_{i,n} \le 2\cdot 2^n\,\beta_{i,o} = 2^{n+1}\,\beta_{i,o}$,

so daß $(B3)_{n+1}$ bewiesen ist.

$(B4)_{n+1}$: Wie in $(B2)_{n+1}$ gezeigt, läßt sich Hilfssatz VIII.2 auf $(x_{i,n},\lambda_{i+1})$ anwenden. Aus (8.4) für $\mu = 1$ erhält man damit unter Beachtung von (8.23), (8.30), $(B4)_n$ und $(B6)_n$

$$\begin{aligned}
&\|H(x_{i,n+1},\lambda_{i+1})\| = \\
&= \|H(x_{i,n+1},\lambda_{i+1}) - H(x_{i,n},\lambda_{i+1}) - H_x(x_{i,n},\lambda_{i+1})\,(x_{i,n+1} - x_{i,n})\| \\
&\le \frac{1}{2}\,K2(x_{i,n},\lambda_{i+1},2\zeta_{i,n})\,\zeta_{i,n}^2 \\
&\le \frac{1}{2}\,K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\,\zeta_{i,n}^2 \\
&\le \frac{1}{2}\,K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\,\beta_{i,n}\,\zeta_{i,n}\,\|H(x_{i,n},\lambda_{i+1})\| \\
&= \frac{1}{2}\,\eta_{i,n}\,\|H(x_{i,n},\lambda_{i+1})\| \\
&\le \frac{1}{4}\,\|H(x_{i,n},\lambda_{i+1})\| \\
&\le \frac{1}{4^{n+1}}\,\|H(x_i,\lambda_{i+1})\| \,.
\end{aligned}$$

$(B5)_{n+1}$: Unter Berücksichtigung von $(B3)_{n+1}$, $(B4)_{n+1}$, $(B5)_n$ und $(B6)_n$ gilt

$$\begin{aligned}
\zeta_{i,n+1} &= \|H_x^{-1}(x_{i,n+1},\lambda_{i+1})\,H(x_{i,n+1},\lambda_{i+1})\| \\
&\le \beta_{i,n+1}\,\|H(x_{i,n+1},\lambda_{i+1})\| \\
&\le 2\,\beta_{i,n}\,\frac{1}{2}\,K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\,\zeta_{i,n}^2 \\
&\le \eta_{i,n}\,\zeta_{i,n} \\
&\le \frac{1}{2}\,\zeta_{i,n} \\
&\le \frac{1}{2^{n+1}}\,\zeta_{i,o} = \frac{1}{2^{n+1}}\,\zeta_i(\lambda_{i+1}) \,.
\end{aligned}$$

$(B6)_{n+1}$: Aus $(B3)_{n+1}$, $(B5)_{n+1}$ und $(B6)_n$ folgt

$$\begin{aligned}
\eta_{i,n+1} &= \beta_{i,n+1}\,\zeta_{i,n+1}\,K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1})) \\
&\le 2\,\beta_{i,n}\,\frac{1}{2}\,\zeta_{i,n}\,K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1})) \\
&= \eta_{i,n} \le \frac{1}{2} \,.
\end{aligned}$$

Beweis zu (B7)

Es sei $k_o \in \mathbb{N}_o$. Für $j \in \mathbb{N}$ folgt dann durch Anwendung von $(B5)_{k_o+l}$ für alle $l \in \mathbb{N}$ mit $l \leq j-1$:

$$(8.31) \quad \|x_{i,k_o+j} - x_{i,k_o}\| \leq \sum_{l=0}^{j-1} \zeta_{i,k_o+l} \leq \sum_{l=0}^{j-1} \frac{1}{2^{k_o+l}} \zeta_{i,o} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{k_o}} \zeta_{i,o} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^l} = \frac{1}{2^{k_o-1}} \zeta_{i,o} .$$

Ist deshalb $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so kann man k_o so wählen, daß

$$\frac{1}{2^{k_o-1}} \zeta_{i,o} < \varepsilon ,$$

womit dann für alle $k \geq k_o$ und $j \in \mathbb{N}$:

$$\|x_{i,k+j} - x_{i,k}\| \leq \varepsilon .$$

Also bildet $\{ x_{i,k} \mid k \in \mathbb{N}_o \}$ eine Cauchy-Folge, die in dem Banachraum X einen eindeutig definierten Grenzwert $x^*(\lambda_{i+1})$ besitzt.

Wendet man (8.31) für $k_o = 0$ an, so erhält man für alle $j \in \mathbb{N}$:

$$\|x_{i,j} - x_{i,o}\| \leq 2 \zeta_{i,o} .$$

Deshalb muß auch $x^*(\lambda_{i+1})$ in $\overline{S}(x_{i,o}, 2\zeta_{i,o}) = \overline{S}(x_i, 2\zeta_i(\lambda_{i+1}))$ liegen.

Nach $(B2)_j$ ist außerdem für alle $j \in \mathbb{N}$:

$$(x_{i,j}, \lambda_{i+1}) \in M(H, x_o, c) .$$

Wegen der nach (V1) geltenden Abgeschlossenheit von $M(H,x_o,c)$ liegt dann auch $(x^*(\lambda_{i+1}), \lambda_{i+1}) = \lim_{j \to \infty} (x_{i,j}, \lambda_{i+1})$ in $M(H,x_o,c)$.

Nach (V2) i) ist H bei $(x^*(\lambda_{i+1}), \lambda_{i+1})$ stetig, so daß mit $(B4)_k$:

$$\|H(x^*(\lambda_{i+1}), \lambda_{i+1})\| = \lim_{k \to \infty} \|H(x_{i,k}, \lambda_{i+1})\| \leq \lim_{k \to \infty} \frac{1}{4^k} \|H(x_i, \lambda_{i+1})\| = 0 .$$

Beweis zu (B8)

Nach (B7) gilt

$$(8.32) \quad (x^*(\lambda_{i+1}), \lambda_{i+1}) \in M(H, x_o, c) \cap \overline{S}(x_i, 2\zeta_i(\lambda_{i+1})) \times \{ \lambda_{i+1} \} \text{ und}$$

$$(8.33) \quad (x^*(\lambda_{i+1}), \lambda_{i+1}) = \lim_{k \to \infty} (x_{i,k}, \lambda_{i+1}) .$$

Gemäß (V3) existiert zu $M(H,x_o,c)$ eine offene Umgebung U mit der (4.17) gültig ist.
Wegen (8.32) existiert sicher ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$S(x^*(\lambda_{i+1}),\varepsilon) \times \{\lambda_{i+1}\} \subset U .$$

Ferner existiert wegen (8.33) ein $k_o \in \mathbb{N}$, so daß

$$\|x^*(\lambda_{i+1}) - x_{i,k_o}\| < \varepsilon .$$

Es ist dann

$$[(x_{i,k_o},\lambda_{i+1}),(x^*(\lambda_{i+1}),\lambda_{i+1})] \subset U .$$

Unter Berücksichtigung von $(B5)_k$ gilt außerdem

$$\begin{aligned}\|x^*(\lambda_{i+1}) - x_{i,k_o}\| &\le \sum_{j=0}^{\infty} \|x_{i,k_o+j+1} - x_{i,k_o+j}\| \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_{i,k_o+j} \\ &\le \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \zeta_{i,k_o} \\ &= 2\,\zeta_{i,k_o}\end{aligned}$$

Wegen (V3) folgt deshalb mit (4.17):

$$\|H_x(x^*(\lambda_{i+1}),\lambda_{i+1}) - H_x(x_{i,k_o},\lambda_{i+1})\| \le$$

$$\le K2(x_{i,k_o},\lambda_{i+1},2\zeta_{i,k_o})\,\|x^*(\lambda_{i+1}) - x_{i,k_o}\|$$

$$\le K2(x_{i,k_o},\lambda_{i+1},2\zeta_{i,k_o})\,2\,\zeta_{i,k_o} .$$

Beachtet man (8.30), so kann man weiter folgern, daß

$$(8.34)\quad \|H_x(x^*(\lambda_{i+1}),\lambda_{i+1}) - H_x(x_{i,k_o},\lambda_{i+1})\| \le$$

$$\le K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\,2\,\zeta_{i,k_o} .$$

Nach $(B2)_k$ gilt ferner

$$\forall\, k \in \mathbb{N}: \quad [(x_{i,k-1},\lambda_{i+1}),(x_{i,k},\lambda_{i+1})] \subset M(H,x_o,c) .$$

Unter Verwendung von (8.30) erhält man deshalb mit (4.17):

$$\forall\, k \in \mathbb{N}: \quad \|H_x(x_{i,k},\lambda_{i+1}) - H_x(x_{i,k-1},\lambda_{i+1})\| \le$$

$$\le K2(x_{i,k-1},\lambda_{i+1},\zeta_{i,k-1})\,\|x_{i,k} - x_{i,k-1}\| =$$

$= K2(x_{i,k-1},\lambda_{i+1},\zeta_{i,k-1})\ \zeta_{i,k-1}$

$\leq K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\ \zeta_{i,k-1}$.

Dies führt zu der Abschätzung

$$\|H_x(x_{i,k_o},\lambda_{i+1}) - H_x(x_i,\lambda_{i+1})\| \leq \sum_{k=1}^{k_o} \|H_x(x_{i,k},\lambda_{i+1}) - H_x(x_{i,k-1},\lambda_{i+1})\|$$

$$\leq K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1})) \sum_{k=1}^{k_o} \zeta_{i,k-1}$$

$$= K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1})) \sum_{k=0}^{k_o-1} \zeta_{i,k} .$$

Zusammen mit (8.34) gilt daher:

$$\|H_x(x^*(\lambda_{i+1}),\lambda_{i+1}) - H_x(x_i,\lambda_{i+1})\| \leq$$

$$\leq \|H_x(x^*(\lambda_{i+1}),\lambda_{i+1}) - H_x(x_{i,k_o},\lambda_{i+1})\| + \|H_x(x_{i,k_o},\lambda_{i+1}) - H_x(x_i,\lambda_{i+1})\|$$

$$\leq K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\ (2\ \zeta_{i,k_o} + \sum_{k=0}^{k_o-1} \zeta_{i,k}) .$$

Da nach $(B5)_k$:

$$2\ \zeta_{i,k_o} + \sum_{k=0}^{k_o-1} \zeta_{i,k} \leq 2\ \frac{1}{2^{k_o}}\ \zeta_i(\lambda_{i+1}) + \sum_{k=0}^{k_o-1} \frac{1}{2^k}\ \zeta_i(\lambda_{i+1})$$

$$\leq (\frac{1}{2^{k_o-1}} + \sum_{k=0}^{k_o-1} \frac{1}{2^k})\ \zeta_i(\lambda_{i+1})$$

$$= 2\ \zeta_i(\lambda_{i+1}) ,$$

ist damit (B8) bewiesen. ▲

VIII.4 Hilfssatz

Es sei H eine Einbettung für F bezüglich x_o, $c \in \mathbb{R}_+$, $x_i \in D$ und $\lambda_i \in [0,1]$.

Es gelte

(V1) $M(H,x_o,c)$ ist abgeschlossen

(V2) i) H ist auf einer offenen Umgebung U_1 von $M(H,x_o,c)$ stetig Fréchet-differenzierbar

ii) Es existiert $H_x^{-1}(x_i,\lambda_i) \in L(Z,X)$

(V3) H_x erfüllt die Lipschitzbedingung L2(M(H,x_o,c))

(V4) Es existiert eine positive Konstante γ mit

$\forall\ (x,\lambda) \in M(H,x_o,c) : \quad \|H_\lambda(x,\lambda)\| \leq \gamma$

(V5) $(x_i,\lambda_i) \in M(H,x_o,c)$ mit $\|H(x_i,\lambda_i)\| \leq \frac{c}{4}$

(V6) Bildet man $\eta_i(\lambda_i)$ zu (x_i,λ_i) nach (6.22), so gilt

$\eta_i(\lambda_i) \leq \frac{1}{2}$

Betrachtet man dann (EV2) mit der nach (V3) existierenden Funktion K2, so gilt bezüglich (x_i,λ_i):

(B1) $\Delta\lambda_i$ ist nach (6.17) wohldefiniert mit $\Delta\lambda_i \geq \min\{\frac{3}{4}\frac{c}{\gamma}, 1-\lambda_i\}$

(B2) $\exists\ \lambda_{i+1} \in L_i$ mit (6.23) und (6.24)

(B3) Ist λ_{i+1} zu (x_i,λ_i) nach (6.23) und (6.24) gewählt, so sind für (x_i,λ_{i+1}) die Voraussetzungen von Hilfssatz VIII.3 erfüllt

(B4) Zu λ_{i+1} aus (B2) ist x_{i+1} nach EV2 wohldefiniert mit $(x_{i+1},\lambda_{i+1}) \in M(H,x_o,c)$ und

$\|H(x_{i+1},\lambda_{i+1})\| \leq \frac{1}{4}\|H(x_i,\lambda_{i+1})\| \leq \frac{c}{4}$

(B5) Es existiert $H_x^{-1}(x_{i+1},\lambda_{i+1}) \in L(Z,X)$ und es ist $\eta_{i+1}(\lambda_{i+1}) \leq \frac{1}{2}$

Beweis:

Zu (B1):

Für $\delta \in [0,1-\lambda_i]$ ist $P(x_i,\lambda_i,\delta)$ als Durchschnitt der kompakten Menge $\{x_i\} \times [\lambda_i,\lambda_i+\delta]$ mit der abgeschlossenen Menge $M(H,x_o,c)$ nichtleer und kompakt. Nach (V2) ist $\|H_\lambda(x_i,\lambda)\|$ auf $P(x_i,\lambda_i,\delta)$ stetig, so daß $\gamma_i(\delta)$ gemäß (6.10) wohldefiniert und in δ selbst wiederum stetig sowie monoton ist. Damit ist auch $\delta\ \gamma_i(\delta)$ stetig und monoton, so daß die Menge $Q(x_i,\lambda_i)$ beschränkt und abgeschlossen, also kompakt ist. Demzufolge ist $\Delta\lambda_i$ gemäß (6.17) wohldefiniert.

Für $\delta_i := \min\{\frac{3}{4}\frac{c}{\gamma}, 1-\lambda_i\}$ gilt dabei $\delta_i \in [0,1-\lambda_i]$ mit $\gamma_i(\delta_i) \leq \gamma$ nach (V4), da $P(x_i,\lambda_i,\delta_i) \subset M(H,x_o,c)$.

Damit folgt unter Verwendung von (V5)

$\delta_i\ \gamma_i(\delta_i) \leq \frac{3}{4}\frac{c}{\gamma}\gamma_i(\delta_i) \leq \frac{3}{4}c \leq c - \|H(x_i,\lambda_i)\|$.

Also ist $\delta_i \in Q(x_i,\lambda_i)$, so daß $\delta_i \leq \max Q(x_i,\lambda_i) = \Delta\lambda_i$.

Zu (B2):

Wie im Beweis von Satz VII.5, Teil (A) läßt sich Hilfssatz VII.4 für (x_i,λ_i), $\delta := \Delta\lambda_i$ nach (6.17) und $\gamma_i(\delta)$ nach (6.10) anwenden, denn wegen $P(x_i,\lambda_i,\delta) \subset M(H,x_o,c)$ folgt (V1) und (V2) von Hilfssatz VII.4 aus den entsprechenden Voraussetzungen dieses Hilfssatzes und (V3) von Hilfssatz VII.4 gilt gemäß Definition von $\gamma_i(\delta)$ nach (6.10).

Man erhält deshalb

(8.35) $\quad \forall\ \lambda \in [\lambda_i,\bar{\lambda}_{i+1}] : \quad (x_i,\lambda) \in M(H,x_o,c)$.

Wegen der Existenz von $H_x^{-1}(x_i,\lambda_i) \in L(Z,X)$ nach (V2) ii) und der Stetigkeit von H_x auf U_1 nach (V2) i) existiert nach Satz IV.17 (Banach-Lemma) auch $H_x^{-1}(x,\lambda)$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von (x_i,λ_i). Zu $q < 1$ existiert nämlich ein $\delta > 0$ mit

$$\forall\ (x,\lambda) \in U_1 \cap S((x_i,\lambda_i),\delta) : \quad \|H_x(x,\lambda) - H_x(x_i,\lambda_i)\| \leq \frac{q}{\|H_x^{-1}(x_i,\lambda_i)\|} ,$$

so daß

$$\forall\ (x,\lambda) \in U_1 \cap S((x_i,\lambda_i),\delta) : \quad \|H_x^{-1}(x_i,\lambda_i)\,(H_x(x,\lambda) - H_x(x_i,\lambda_i))\| \leq q .$$

Folglich sind die Voraussetzungen von Satz IV.17 für $T_1 := H_x(x_i,\lambda_i)$ und $T_2 := H_x(x,\lambda)$ erfüllt, und man kann schließen, daß in Schritt 2 von EV2 $l_i > \lambda_i$ gelten muß.

Zusammen mit (B1) folgt daher, daß $L_i \neq \emptyset$.

Betrachtet man nun ein beliebiges $\tilde{\lambda} \in L_i$, so ist $\tilde{\lambda} < l_i$ und deshalb gilt definitionsgemäß

(8.36) $\quad \forall\ \lambda \in [\lambda_i,\tilde{\lambda}] : \quad \exists\ H_x^{-1}(x_i,\lambda) \in L(Z,X)$.

Unter Berücksichtigung von (8.35) und (8.36) sowie von (V2) und (V3) ist deshalb Hilfssatz VIII.1 anwendbar und es folgt die Stetigkeit von η_i auf $[\lambda_i,\tilde{\lambda}]$. Nach dem Zwischenwertsatz wird somit jeder Wert zwischen $\eta_i(\lambda_i)$ und $\eta_i(\tilde{\lambda})$ mindestens einmal angenommen.

Nach Voraussetzung gilt $\lambda_i \in L_i$ und $\eta_i(\lambda_i) \leq \frac{1}{2}$.

Falls nun ein $\tilde{\lambda} \in L_i$ existiert mit $\eta_i(\tilde{\lambda}) \geq \frac{1}{2}$, so existiert folglich sicher auch ein $\lambda_{i+1} \in [\lambda_i,\tilde{\lambda}] \subset L_i$ mit $\eta_i(\lambda_{i+1}) \in [\frac{1}{2}\varrho,\frac{1}{2}]$, also mit (6.23) und (6.24).

Falls andererseits $\forall\ \lambda \in L_i : \quad \eta_i(\lambda) < \frac{1}{2}\rho$, so ist (6.23) für alle $\lambda \in L_i$ erfüllt, und es existiert stets auch ein $\lambda_{i+1} \in L_i$ mit (6.24). Ist nämlich $l_i > \overline{\lambda}_{i+1}$, so muß $L_i = [\lambda_i, \overline{\lambda}_{i+1}]$ gelten und es folgt $\lambda_{i+1} = \overline{\lambda}_{i+1}$. Ist andererseits $\overline{\lambda}_{i+1} \geq l_i$, so gilt $L_i = [\lambda_i, l_i)$ und es kann jedes $\lambda_{i+1} \in [\frac{1}{2}(\lambda_i + l_i), l_i) \neq \emptyset$ verwendet werden.

Zu (B3):

Es sei λ_{i+1} aus (B2) betrachtet.

Wegen $[\lambda_i, \lambda_{i+1}] \subset L_i \subset [\lambda_i, \overline{\lambda}_{i+1}]$ gilt mit (8.35) erst recht

(8.37) $\quad \forall\ \lambda \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}] : \quad (x_i, \lambda) \in M(H, x_o, c)$.

Da $\lambda_{i+1} \in L_i$, folgt aus (8.36) ferner

(8.38) $\quad$ es existiert $H_x^{-1}(x_i, \lambda_{i+1}) \in L(Z,X)$.

Somit sind die Voraussetzungen zu Hilfssatz VIII.3 für (x_i, λ_{i+1}) erfüllt, denn (V1), (V2) i) und (V3) sind bei Hilfssatz VIII.3 und Hilfssatz VIII.4 identisch, (V2) ii) gilt wegen (8.38), (V4) folgt aus (8.37) und nach Wahl von λ_{i+1} gemäß (6.23) gilt außerdem (V5).

Zu (B4):

Bezüglich der Anwendung der Ergebnisse von Hilfssatz VIII.3 gelten nach (8.23), (8.24), (8.25) und (6.19), (6.20), (6.21) definitionsgemäß die folgenden Übereinstimmungen:

$x_{i,1} = x_{i+1}$, $\quad \beta_{i,1} = \beta_{i+1}(\lambda_{i+1}) \quad$ und $\quad \zeta_{i,1} = \zeta_{i+1}(\lambda_{i+1})$.

Deshalb ergibt sich (B4), wenn man die Aussagen von Hilfssatz VIII.3 zu (x_i, λ_{i+1}) betrachtet.

Aus $(B1)_1$ folgt die Wohldefiniertheit von x_{i+1},

mit $(B2)_1$ erhält man $(x_{i+1}, \lambda_{i+1}) \in M(H, x_o, c)$ und

$(B4)_1$ liefert $\|H(x_{i+1}, \lambda_{i+1})\| \leq \frac{1}{4}\|H(x_i, \lambda_{i+1})\| \leq \frac{1}{4}\, c$.

Zu (B5):

Auch (B5) läßt sich mit Hilfssatz VIII.3 herleiten.

Aus $(B3)_1$ von Hilfssatz VIII.3 folgt die Existenz von $H_x^{-1}(x_{i+1}, \lambda_{i+1}) \in L(Z,X)$.

Wegen $(B5)_1$ gilt ferner $\zeta_{i+1}(\lambda_{i+1}) \leq \frac{1}{2}\,\zeta_i(\lambda_{i+1})$.

Für $x \in \overline{S}(x_{i+1}, 2\zeta_{i+1}(\lambda_{i+1}))$ folgt daher

$$\begin{aligned}\|x - x_i\| &\leq \|x - x_{i+1}\| + \|x_{i+1} - x_i\| \\ &\leq 2\,\zeta_{i+1}(\lambda_{i+1}) + \zeta_i(\lambda_{i+1}) \\ &\leq 2\,\zeta_i(\lambda_{i+1}) .\end{aligned}$$

Also gilt $\overline{S}(x_{i+1}, 2\zeta_{i+1}(\lambda_{i+1})) \subset \overline{S}(x_i, 2\zeta_i(\lambda_{i+1}))$, so daß wegen (4.18) die Abschätzung

$$K2(x_{i+1}, \lambda_{i+1}, 2\zeta_{i+1}(\lambda_{i+1})) \leq K2(x_i, \lambda_{i+1}, 2\zeta_i(\lambda_{i+1}))$$

möglich ist.

Das hat zur Folge, daß

$$\begin{aligned}\eta_{i+1}(\lambda_{i+1}) &= \beta_{i+1}(\lambda_{i+1})\;\zeta_{i+1}(\lambda_{i+1})\;K2(x_{i+1}, \lambda_{i+1}, 2\zeta_{i+1}(\lambda_{i+1})) \\ &\leq \beta_{i,1}\;\zeta_{i,1}\;K2(x_i, \lambda_{i+1}, 2\zeta_i(\lambda_{i+1})) \\ &= \eta_{i,1} ,\end{aligned}$$

woraus sich mit $(B6)_1$ die gewünschte Aussage $\eta_{i+1}(\lambda_{i+1}) \leq \frac{1}{2}$ ergibt. ▲

VIII.5 Satz über die Wohldefiniertheit von EV2

Es sei H eine Einbettung für F bezüglich x_0, $c \in \mathbb{R}_+$.

Es gelte

(V1) $M(H, x_0, c)$ ist abgeschlossen

(V2) i) H ist auf einer offenen Umgebung U_1 von $M(H, x_0, c)$ stetig Fréchet-differenzierbar

ii) Es existiert $H_x^{-1}(x_0, 0) \in L(Z, X)$

(V3) H_x erfüllt die Lipschitzbedingung $L2(M(H, x_0, c))$

(V4) Es existiert eine positive Konstante γ mit

$$\forall\, (x,\lambda) \in M(H, x_0, c) : \quad \|H_\lambda(x,\lambda)\| \leq \gamma$$

Dann gilt

(B1) Das Einbettungsverfahren EV2 ist mit H und der nach (V3) gemäß Definition IV.15 existierenden Funktion K2 für x_0 wohldefiniert.

(B2) Betrachtet man die durch EV2 definierte Folge $\{ (x_n,\lambda_n) \mid n \in \mathbb{N}_o \}$, so gelten die Voraussetzungen von Hilfssatz VIII.4 bezüglich (x_n,λ_n) für alle $n \in \mathbb{N}_o$.

(B3) Betrachtet man die durch EV2 definierte Folge $\{ (x_n,\lambda_{n+1}) \mid n \in \mathbb{N}_o \}$, so gelten die Voraussetzungen von Hilfssatz VIII.3 bezüglich (x_n,λ_{n+1}) für alle $n \in \mathbb{N}_o$.

Beweis:

Die Wohldefiniertheit von (EV2) ergibt sich induktiv aus Hilfssatz VIII.4.

Für $(x_o,\lambda_o) := (x_o,0)$ sind nämlich die Voraussetzungen dieses Hilfssatzes erfüllt:

(V1), (V2), (V3) und (V4) sind hierfür bei Hilfssatz VIII.4 und Satz VIII.5 identisch.
(V5) gilt, weil $(x_o,0) \in M(H,x_o,c)$ gemäß Definition von $M(H,x_o,c)$ und $\|H(x_o,\lambda_o)\| = 0$ nach (4.2), da H Einbettung für F bezüglich x_o .

(V6) gilt, weil mit $H(x_o,0) = 0$ auch $\eta_o(\lambda_o) = 0 \leq \frac{1}{2}$ folgt.

Sind die Voraussetzungen von Hilfssatz VIII.4 aber für (x_n,λ_n) bei festem $n \in \mathbb{N}_o$ erfüllt, so sind gemäß (B2) und (B4) des Hilfssatzes die Größen λ_{n+1} und x_{n+1} wohldefiniert.

Zufolge (B4) und (B5) von Hilfssatz VIII.4 werden dabei von (x_{n+1},λ_{n+1}) die Voraussetzungen von Hilfssatz VIII.4 erneut erfüllt.

Folglich gelten die Voraussetzungen und Aussagen von Hilfssatz VIII.4 bezüglich (x_n,λ_n) für alle $n \in \mathbb{N}_o$ und die Wohldefiniertheit von EV2 folgt aus (B2) und (B4) von Hilfssatz VIII.4.

Damit sind (B1) und (B2) bewiesen.

(B3) folgt wegen der Gültigkeit von (B2) unmittelbar aus (B3) von Hilfssatz VIII.4 . ▲

VIII.6 Erster Ausführbarkeitssatz für EV2

Es sei H eine Einbettung für F bezüglich x_o, $c \in \mathbb{R}_+$.

Es gelte

(V1) $M(H,x_o,c)$ ist abgeschlossen

(V2) H ist auf $M(H,x_o,c)$ regulär

(V3) H_x erfüllt die Lipschitzbedingung L2(M(H,x_o,c))

(V4) Es existiert eine positive Konstante γ mit

$$\forall\ (x,\lambda) \in M(H,x_o,c) : \quad \|H_\lambda(x,\lambda)\| \leq \gamma$$

Dann gilt

(B1) Das Einbettungsverfahren EV2 ist mit H und der nach (V3) gemäß Definition IV.15 existierenden Funktion K2 für x_o ausführbar.

Beweis:

Die Wohldefiniertheit von EV2 ist durch Satz VIII.5 gesichert, denn (V2) von Satz VIII.6 impliziert (V2) von Satz VIII.5, und die restlichen Voraussetzungen sind bei beiden Sätzen identisch.
Darüber hinaus folgt wegen (B2) und (B3) von Satz VIII.5 für die mit EV2 erzeugten Iterierten

(8.39) Die Aussagen von Hilfssatz VIII.4 gelten bezüglich (x_i,λ_i) für jedes $i \in \mathbb{N}$.

sowie

(8.40) Die Aussagen von Hilfssatz VIII.3 gelten bezüglich (x_i,λ_{i+1}) für jedes $i \in \mathbb{N}$.

Zufolge Hilfssatz VII.4 gilt außerdem - wie bereits in (8.35) gezeigt - für jedes $i \in \mathbb{N}$:

$$\forall\ \lambda \in [\lambda_i,\overline{\lambda}_{i+1}] : \quad (x_i,\lambda) \in M(H,x_o,c) .$$

Nach (V2) existiert deshalb für jedes $i \in \mathbb{N}$ zu $H_x(x_i,\lambda)$ die koniare Inverse $H_x^{-1}(x_i,\lambda)$, wenn λ in $[\lambda_i,\overline{\lambda}_{i+1}]$ liegt.

Wegen der Stetigkeit von H_x in $(x_i,\overline{\lambda}_{i+1})$ läßt sich darüber hinaus mit Hilfe von Satz IV.17 (Banach-Lemma) aus der Existenz von $H_x^{-1}(x_i,\overline{\lambda}_{i+1}) \in L(Z,X)$ auch noch die koniare Invertierbarkeit von $H_x(x_i,\lambda)$ nachweisen, wenn λ aus einer geeigneten offenen Umgebung von $\overline{\lambda}_{i+1}$ stammt.

Gemäß Definition von l_i in EV2 gilt daher

(8.41) $$\forall\ i \in \mathbb{N} : \quad l_i > \overline{\lambda}_{i+1} .$$

Für den noch durchzuführenden Nachweis der Lösungskonvergenz von EV2 wird nun zunächst die Gültigkeit der beiden folgenden Hilfsaussagen gezeigt:

(A1) Ist die Folge $\{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}_o\}$ nach EV2 gewählt und gilt $\lambda_i < 1$, so existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\lambda_{i+k} > \lambda_i$.

(A2) Ist die Folge $\{ \lambda_n \mid n \in \mathbb{N}_o \}$ nach EV2 gewählt, so existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\lambda_k = 1$.

Zu (A1):

Angenommen, es sei $\lambda_i < 1$ und $\forall\, k \in \mathbb{N}: \quad \lambda_{i+k} = \lambda_i$.

Nach (8.39) gelten dann bezüglich $(x_i, \lambda_{i+1}) = (x_i, \lambda_i)$ die Aussagen $(B1)_k$ bis $(B6)_k$ von Hilfssatz VIII.3 für alle $k \in \mathbb{N}$.

Gemäß (8.23), (8.24), (8.25) sowie (6.19), (6.20) und (6.21) gelten dabei die folgenden Übereinstimmungen:

(8.42) $\forall\, k \in \mathbb{N}_o:$
$$x_{i+k} = x_{i,k}$$
$$\beta_{i+k}(\lambda_{i+1}) = \beta_{i,k}$$
$$\zeta_{i+k}(\lambda_{i+1}) = \zeta_{i,k}.$$

Aus $(B4)_k$ von Hilfssatz VIII.3 folgt deshalb zunächst

(8.43) $\forall\, k \in \mathbb{N}: \quad \|H(x_{i+k}, \lambda_{i+1})\| = \|H(x_{i,k}, \lambda_{i+1})\| \leq \frac{1}{4^k} \|H(x_i, \lambda_{i+1})\|.$

Nach (8.26) und (6.22) gilt ferner unter Berücksichtigung von (8.30):

(8.44) $\forall\, k \in \mathbb{N}:$
$$\eta_{i+k}(\lambda_{i+1}) = K2(x_{i+k}, \lambda_{i+1}, 2\zeta_{i+k}(\lambda_{i+1}))\ \beta_{i+k}(\lambda_{i+1})\ \zeta_{i+k}(\lambda_{i+1})$$
$$\leq K2(x_i, \lambda_{i+1}, 2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\ \beta_{i,k}\ \zeta_{i,k}.$$

Weil zudem nach $(B2)_k$ von Hilfssatz VIII.3

$\forall\, k \in \mathbb{N}: \quad (x_{i+k}, \lambda_{i+1}) \in M(H, x_o, c)$

erhält man mit (V2), (V3) und (8.43)

$\forall\, k \in \mathbb{N}:$
$$\eta_{i+k}(\lambda_{i+1}) \leq K2(x_i, \lambda_{i+1}, 2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\ \beta_{i,k}\ \zeta_{i,k}$$
$$\leq \varkappa\, \beta^2\, \|H(x_{i,k}, \lambda_{i+1})\|$$
$$\leq \varkappa\, \beta^2\, \frac{1}{4^k}\, \|H(x_i, \lambda_{i+1})\|$$
$$\leq \frac{1}{4^k}\, \varkappa\, \beta^2\, c.$$

Damit folgt aber die Existenz eines $k_o \in \mathbb{N}$ mit

(8.45) $$\eta_{i+k_o}(\lambda_{i+k_o+1}) = \eta_{i+k_o}(\lambda_{i+1}) \leq \frac{1}{4^{k_o}}\, \varkappa\, \beta^2\, c < \tfrac{1}{2}\rho.$$

Hieraus ergibt sich nun ein Widerspruch zwischen der Annahme und (6.24) i) von EV2, wonach

(8.46) $\lambda_{i+k_o+1} = \bar{\lambda}_{i+k_o+1}$ falls $\eta_{i+k_o}(\lambda_{i+k_o+1}) < \frac{1}{2}\rho$ und

$$1_{i+k_o} > \bar{\lambda}_{i+k_o+1} .$$

Es ist nämlich $\bar{\lambda}_{i+k_o+1} = \lambda_{i+k_o} + \Delta\lambda_{i+k_o}$ mit $\Delta\lambda_{i+k_o} \geq \min \{ \frac{3}{4}\frac{c}{\gamma} , 1-\lambda_i \}$ nach (B1) von Hilfssatz VIII.4, so daß wegen $\lambda_i < 1$:

(8.47) $\bar{\lambda}_{i+k_o+1} > \lambda_{i+k_o}$.

Wegen (8.41) und (8.45) folgt deshalb aus (8.46) mit (8.47), daß

(8.48) $\lambda_{i+k_o+1} = \bar{\lambda}_{i+k_o+1} > \lambda_{i+k_o}$.

Im Gegensatz zur Annahme erhält man damit, daß durch EV2 jedes $\lambda_i < 1$ spätestens nach endlich vielen Schritten vergrößert werden muß.

Zu (A2):

Die Folge $\{ \lambda_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ ist monoton nicht fallend und durch 1 beschränkt. Also existiert

$\bar{\lambda} : \sup \{ \lambda_n \mid n \in \mathbb{N} \} \leq 1$

und zu $\varepsilon := \min \{ \frac{c}{2\gamma} , \frac{\rho}{4\beta^2 \varkappa \gamma} \}$ gilt

(8.49) $\exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq m : \quad \bar{\lambda} - \lambda_n \leq \varepsilon$.

Weil dann

$\forall\, n \geq m : \quad \bar{\lambda} - \lambda_n \leq \frac{3}{4}\frac{c}{\gamma}$

und außerdem wegen $\bar{\lambda} \leq 1$

$\forall\, n \geq m : \quad \bar{\lambda} - \lambda_n \leq 1 - \lambda_n$,

erhält man mit (B1) von Hilfssatz VIII.4

$\forall\, n \geq m : \quad \bar{\lambda} - \lambda_n \leq \min \{ \frac{3}{4}\frac{c}{\gamma} , 1 - \lambda_n \} \leq \Delta\lambda_n$.

Daraus folgt

(8.50) $\forall\, n \geq m : \quad \bar{\lambda} \leq \lambda_n + \Delta\lambda_n = \bar{\lambda}_{n+1}$.

Nach (B4) von Hilfssatz VIII.4 gilt

(8.51) $\forall\, i \in \mathbb{N}_o : \quad \| H(x_{m+i+1}, \lambda_{m+i+1}) \| \leq \frac{1}{4} \| H(x_{m+i}, \lambda_{m+i+1}) \|$.

Wegen (V2) ist außerdem die folgende Abschätzung möglich:

$\forall\, i \in \mathbb{N}_o\ \exists\, \tilde{\lambda}_i \in [\lambda_{m+i}, \lambda_{m+i+1}] :$

$\| H(x_{m+i}, \lambda_{m+i+1}) \| \leq \| H(x_{m+i}, \lambda_{m+i}) \| + \| H_\lambda(x_{m+i}, \tilde{\lambda}_i) \| \, | \lambda_{m+i+1} - \lambda_{m+i} |$.

Unter Verwendung von (V4) und (8.49) ergibt sich somit

$$\begin{aligned}\forall\, i \in \mathbb{N}_0 : \quad \|H(x_{m+i},\lambda_{m+i+1})\| &\le \|H(x_{m+i},\lambda_{m+i})\| + \gamma\,(\overline{\lambda} - \lambda_{m+i}) \\ &\le \|H(x_{m+i},\lambda_{m+i})\| + \gamma\,\varepsilon \\ &\le \|H(x_{m+i},\lambda_{m+i})\| + \frac{\rho}{4\,\beta^2\kappa}\,.\end{aligned}$$

Zusammen mit (8.51) kann man deshalb rekursiv schließen, daß

$$\begin{aligned}\forall\, i \in \mathbb{N} \qquad \|H(x_{m+i},\lambda_{m+i+1})\| &\le \|H(x_{m+i},\lambda_{m+i})\| + \frac{\rho}{4\,\beta^2\kappa} \\ &\le \frac{1}{4}\,(\|H(x_{m+i-1},\lambda_{m+i-1})\| + \frac{\rho}{4\,\beta^2\kappa}) + \frac{\rho}{4\,\beta^2\kappa} \\ &\le \frac{1}{4^i}\,\|H(x_m,\lambda_m)\| + \sum_{k=0}^{i} \frac{1}{4^k}\,\frac{\rho}{4\,\beta^2\kappa} \\ &\le \frac{1}{4^i}\,c + \frac{\rho}{4\,\beta^2\kappa} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} \\ &= \frac{1}{4^i}\,c + \frac{\rho}{3\,\beta^2\kappa}\,.\end{aligned}$$

Wählt man nun $i_o \in \mathbb{N}$ so groß, daß

$$\frac{1}{4^i}\,c < \frac{\rho}{6\,\beta^2\kappa}\,,$$

so gilt

$$\|H(x_{m+i_o},\lambda_{m+i_o+1})\| < \frac{\rho}{2\,\beta^2\kappa}\,.$$

Folglich ist für $k := m + i_o$

$$\begin{aligned}\eta_k(\lambda_{k+1}) &= h_\sigma(x_k,\lambda_{k+1},2\zeta_k(\lambda_{k+1}))\;\mu_k(\lambda_{k+1})\;\zeta_k(\lambda_{k+1}) \\ &\le \kappa\,\beta^2\,\|H(x_k,\lambda_{k+1})\| \\ &< \kappa\,\beta^2\,\frac{\rho}{2\,\beta^2\kappa} \\ &= \frac{1}{2}\,\rho\,.\end{aligned}$$

Wegen (8.41) ist das nach (6.24) i) nur möglich, wenn $\lambda_{k+1} = \overline{\lambda}_{k+1}$. Nach (8.50) und der Definition von $\overline{\lambda}$ folgt damit aber auch $\lambda_{k+1} = \overline{\lambda}$. Dies hat wiederum zur Folge, daß $\lambda_{k+1} = \overline{\lambda} = 1$ gelten muß, denn wenn $\lambda_{k+1} < 1$ wäre, so würde wegen (A1) ein $j \in \mathbb{N}$ existieren mit

$\bar{\lambda} = \lambda_{k+1} < \lambda_{k+j}$. Das steht aber im Widerspruch zur Definition von $\bar{\lambda}$, und somit ist (A2) bewiesen.

Es existiert also ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\lambda_i = 1$.

Wegen der Monotonie der Folge $\{ \lambda_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ gilt dann auch

$\forall\, k \in \mathbb{N}_o : \quad \lambda_{i+k} = 1$.

Betrachtet man nun die Folge $\{ (x_n,\lambda_n) \mid n \in \mathbb{N} \}$ ab $n = i$, so stellt man fest, daß diese Restfolge, nämlich

$$\{ (x_{i+k},\lambda_{i+k}) \mid k \in \mathbb{N}_o \} = \{ (x_{i+k},\lambda_{i+1}) \mid k \in \mathbb{N}_o \}$$
$$= \{ (x_{i+k},1) \mid k \in \mathbb{N}_o \}$$

mit der in (B7) von Hilfssatz VIII.3 betrachteten Folge

$\{ (x_{i,k},\lambda_{i+1}) \mid k \in \mathbb{N}_o \}$

identisch ist, wenn man Hilfssatz VIII.3 für (x_i,λ_{i+1}) anwendet.

Wegen (8.40) folgt deshalb aus (B7) von Hilfssatz VIII.3, daß die Folge $\{ (x_n,\lambda_n) \mid n \in \mathbb{N} \}$ in $M(H,x_o,c)$ gegen eine Lösung $(x^*(\lambda_{i+1}),\lambda_{i+1}) = (x^*(1),1)$ der Gleichung $H(x,\lambda_{i+1}) = H(x,1) = 0$ konvergiert.

Also existiert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*(1)$ und wegen $H(x,1) = F(x)$ gilt $F(x^*(1)) = 0$, so daß EV2 lösungskonvergent ist. ▲

VIII.7 Hilfssatz

Es sei H eine Einbettung für F bezüglich x_o, $c \in \mathbb{R}_+$.

Es gelte

(V1) i) H ist auf einer offenen Umgebung U_1 von $M(H,x_o,c)$ stetig Fréchet-differenzierbar

ii) Es existiert eine stetige Lösung x der Einbettung H mit $x(0) = x_o$

iii) $\forall\, \lambda \in [0,1]$ existiert $H_x^{-1}(x(\lambda),\lambda) \in L(Z,X)$

Dann gilt

(B1) Die Abbildung $h : [0,1] \to L(Z,X)$ vermöge

$h(\lambda) := H_x^{-1}(x(\lambda),\lambda)$ ist stetig

(B2) Es existiert ein positiver Radius r, so daß H auf

$$S_r := \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \overline{S}((x(\lambda),\lambda),r) \quad \text{regulär ist.}$$

Beweis:

Zunächst ist die Abbildung h wegen (V1) iii) wohldefiniert.

Sei nun $\lambda_0 \in [0,1]$ fest und $\varepsilon > 0$.

Dann ist für (B1) zu zeigen:

(8.52) $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \;\forall\, \lambda \in [0,1]$:

$$|\lambda - \lambda_0| \leq \delta(\varepsilon) \;\Rightarrow\; \|H_x^{-1}(x(\lambda_0),\lambda_0) - H_x^{-1}(x(\lambda),\lambda)\| \leq \varepsilon \,.$$

Nach (V1) i) bzw. ii) ist x auf $[0,1]$ und H_x auf U_1 stetig.

Also sind auch die Abbildungen

$h_1 : [0,1] \to D \times [0,1]$ vermöge

$h_1(\lambda) := (x(\lambda),\lambda)$

und

$h_2 : [0,1] \to L(X,Z)$ vermöge

$h_2(\lambda) := H_x \circ h_1(\lambda) = H_x(x(\lambda),\lambda)$

stetig.

Zu $\alpha := \|H_x^{-1}(x(\lambda_0),\lambda_0)\|$ und obigem $\varepsilon > 0$ existiert deshalb ein $\delta(\varepsilon) > 0$ mit

(8.53) $\forall\, \lambda \in [0,1]$:

$$|\lambda - \lambda_0| \leq \delta(\varepsilon) \;\Rightarrow\; \|H_x(x(\lambda),\lambda) - H_x(x(\lambda_0),\lambda_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{\alpha\,(\alpha+\varepsilon)} \,.$$

Betrachtet man nun $\lambda \in [0,1]$ mit $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta(\varepsilon)$, so läßt sich Satz IV.17 (Banach-Lemma) auf $T_1 := H_x(x(\lambda_0),\lambda_0)$ und $T_2 := H_x(x(\lambda),\lambda)$ anwenden, denn es gilt:

(V1): T_1 besitzt eine koniare Inverse $T_1^{-1} = H_x^{-1}(x(\lambda_0),\lambda_0)$

(V2): $\|T_1^{-1}(T_2 - T_1)\| \leq \|T_1^{-1}\|\;\|T_2 - T_1\|$

$$= \|H_x^{-1}(x(\lambda_0),\lambda_0)\|\;\|H_x(x(\lambda),\lambda) - H_x(x(\lambda_0),\lambda_0)\|$$

$$\leq \alpha \,\frac{\varepsilon}{\alpha\,(\alpha+\varepsilon)} \quad \text{nach (8.53)}$$

$$= \frac{\varepsilon}{\alpha+\varepsilon} =: q < 1 \,.$$

Gemäß (4.25) gilt dann

$$\|H_x^{-1}(x(\lambda_o),\lambda_o) - H_x^{-1}(x(\lambda),\lambda)\| = \|T_2^{-1} - T_1^{-1}\|$$

$$\leq \frac{q}{1-q}\,\|T_1^{-1}\| = \frac{\frac{\varepsilon}{\alpha+\varepsilon}}{1-\frac{\varepsilon}{\alpha+\varepsilon}}\,\alpha = \varepsilon\ ,$$

also (8.52) und damit (B1).

Wegen (B1) ist auch die Abbildung

$h_\beta : [0,1] \to \mathbb{R}$ vermöge

$h_\beta(\lambda) := \|H_x^{-1}(x(\lambda),\lambda)\|$

stetig und infolgedessen auf dem Kompaktum $[0,1]$ beschränkt.
Also gilt:

(8.54) $\quad \exists\ \beta_o > 0\ \forall\ \lambda \in [0,1] : \quad \|H_x^{-1}(x(\lambda),\lambda)\| \leq \beta_o\ .$

Wegen (V1) i) ist H_x auf U_1 stetig. Deshalb existiert zu jedem $\lambda_o \in [0,1]$ ein $\delta(\lambda_o) > 0$, so daß

(8.55) $\quad \|(x,\lambda) - (x(\lambda_o),\lambda_o)\| \leq \delta(\lambda_o) \quad \Rightarrow$

$$\|H_x(x,\lambda) - H_x(x(\lambda_o),\lambda_o)\| \leq \frac{1}{2\,\beta_o}\ .$$

Damit kann für jedes $\lambda_o \in [0,1]$ und $(x,\lambda) \in S((x(\lambda_o),\lambda_o),\delta(\lambda_o))$ erneut Hilfssatz IV.17 (Banach-Lemma) auf $T_1 := H_x(x(\lambda_o),\lambda_o)$ und $T_2 := H_x(x,\lambda)$ angewendet werden.
Es gilt nämlich mit $q := \frac{1}{2}$

(V1): T_1 besitzt eine koniare Inverse $T_1^{-1} = H_x^{-1}(x(\lambda_o),\lambda_o)$
wegen (V1) iii).

(V2): $\|T_1^{-1}(T_1 - T_1)\| \leq \|T_1^{-1}\|\ \|T_2 - T_1\|$

$$= \|H_x^{-1}(x(\lambda_o),\lambda_o)\|\ \|H_x(x,\lambda) - H_x(x(\lambda_o),\lambda_o)\|$$

$$\leq \beta_o\,\frac{1}{2\,\beta_o} = q \quad \text{nach (8.54) und (8.55)}\ .$$

Mit (B1) folgt dann die Existenz einer koniaren Inversen für $T_2 = H_x(x,\lambda)$ und wegen (4.26) gilt:

$$\|H_x^{-1}(x,\lambda)\| = \|T_2^{-1}\| \leq \frac{1}{1-q}\,\|T_1^{-1}\| = 2\,\|H_x^{-1}(x(\lambda_o),\lambda_o)\| = 2\,\beta_o\ .$$

Die Menge $S_o := \bigcup_{\lambda\in[0,1]} S((x(\lambda),\lambda),\delta(\lambda))$ bildet daher eine offene

Überdeckung von $B := \{ (x(\lambda),\lambda) \mid \lambda \in [0,1] \}$, wobei H_x für jedes $(x,\lambda) \in S_0$ eine durch $\beta := 2\,\beta_0$ beschränkte koniare Inverse besitzt.

Also ist H_x auf S_0 regulär, und es bleibt lediglich noch nachzuweisen, daß ein $r > 0$ existiert mit $S_r \subset S_0$.

Es sei $CS_0 := (X \times \mathbb{R}) - S_0$ das Komplement von S_0 in $X \times \mathbb{R}$.

Wegen $B \subset S_0$ ist dann $B \cap CS_0 = \emptyset$.

Für $\lambda \in [0,1]$ bezeichne $d(\lambda)$ den Abstand von $(x(\lambda),\lambda)$ zu CS_0.

Dann ist $d : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ eine positive stetige Funktion, die auf dem Kompaktum $[0,1]$ ihr Minimum $r_0 > 0$ annimmt.

Ist nun $r \in [0,r_0)$ beliebig, so ist

$$\forall\, \lambda \in [0,1] : \quad \overline{S}((x(\lambda),\lambda),r) \cap CS_0 = \emptyset$$

und damit

$$\forall\, \lambda \in [0,1] : \quad \overline{S}((x(\lambda),\lambda),r) \subset S_0.$$

Daraus folgt, daß auch

$$S_r = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \overline{S}((x(\lambda),\lambda),r) \subset S_0 \ ,$$

so daß H auf S_r regulär ist. ▲

VIII.8 Zweiter Ausführbarkeitssatz für EV2

Es sei H eine Einbettung für F bezüglich x_0, $c \in \mathbb{R}_+$.

Es gelte

(V1) $M(H,x_0,c)$ ist abgeschlossen

(V2) i) H ist auf einer offenen Umgebung U_1 von $M(H,x_0,c)$ stetig Fréchet-differenzierbar

ii) $\forall\, \lambda \in [0,1]$ existiert genau ein $(x(\lambda),\lambda) \in M(H,x_0,c)$ mit $H(x(\lambda),\lambda) = 0$

iii) $\forall\, \lambda \in [0,1]$ existiert $H_x^{-1}(x(\lambda),\lambda) \in L(Z,X)$

(V3) H_x erfüllt die Lipschitzbedingung $L2(M(H,x_0,c))$

(V4) Es existiert eine positive Konstante γ mit

$$\forall\, (x,\lambda) \in M(H,x_0,c) : \quad \|H_\lambda(x,\lambda)\| \leq \gamma$$

Dann gilt:

(B1) Das Einbettungsverfahren EV2 ist mit H und der nach (V3) gemäß Definition IV.15 existierenden Funktion K2 für x_0 ausführbar.

Beweis:

Die Wohldefiniertheit von EV2 kann wie bei Satz VIII.6 durch Anwendung von Satz VIII.5 gesichert werden.

Für (V2) ii) von Satz VIII.5 ist hierzu die Existenz von $H_x^{-1}(x_0,0)$ in $L(Z,X)$ nachzuweisen.
Definitionsgemäß ist $(x_0,0) \in M(H,x_0,c)$ mit $H(x_0,0) = 0$.
Nach (V2) ii) gilt damit

(8.56) $x(0) = x_0$,

so daß man die Existenz von $H_x^{-1}(x_0,0)$ aus (V2) iii) erhält.

Als Folgerung der Anwendbarkeit von Satz VIII.5 ergibt sich wie bei Satz VIII.6 auch hier die Gültigkeit von (8.39) und (8.40).
Aus (V2) folgt darüber hinaus:

(8.57) Die in (V2) ii) festgelegte Lösung x von H ist auf $[0,1]$ stetig.

Ist nämlich $\lambda_0 \in [0,1]$ beliebig, so existiert nach (V2) ii) eindeutig $(x(\lambda_0),\lambda_0) \in M(H,x_0,c)$ mit $H(x(\lambda_0),\lambda_0) = 0$. Nach (V2) i) ist H in einer Umgebung von $(x(\lambda_0),\lambda_0)$ stetig Fréchet-differenzierbar und nach (V2) iii) existiert $H_x^{-1}(x(\lambda_0),\lambda_0) \in L(Z,X)$. Deshalb kann Satz IV.18 (Satz über implizite Funktionen) angewendet werden und es folgt die Existenz einer auf einer offenen Umgebung U_0 von λ_0 definierten stetigen Funktion $\tilde{x}$ mit $\tilde{x}(\lambda_0) = x(\lambda_0)$ und

$\forall\, \lambda \in U_0 : \quad H(\tilde{x}(\lambda),\lambda) = 0$.

Wegen der in (V2) ii) geforderten Eindeutigkeit muß die Funktion $\tilde{x}$ mit der dort vorgegebenen Lösung x identisch sein, so daß sich die Stetigkeit von x in λ_0 ergibt.

(8.56) und (8.57) sichern gemeinsam die Gültigkeit von (V1) ii) bei Hilfssatz VIII.7. Da außerdem (V2) i) und (V2) iii) von Satz VIII.8 mit (V1) i) und (V1) iii) von Hilfssatz VIII.7 übereinstimmen, kann Hilfssatz VIII.7 angewendet werden und es folgt insbesondere:

(8.58) Es existiert ein $r > 0$, so daß H auf $S_r = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \overline{S}((x(\lambda),\lambda),r)$ regulär ist.

Der Nachweis der Lösungskonvergenz von EV2 ergibt sich nun ähnlich

wie bei Satz VIII.6 unter Verwendung der Hilfsaussagen (A1) und (A2). Also ist nachzuweisen, daß diese Hilfsaussagen auch unter den Voraussetzungen von Satz VIII.8 gültig bleiben.

Zu (A1):

Angenommen, es sei $\lambda_i < 1$ und $\forall\, k \in \mathbb{N}: \lambda_{i+k} = \lambda_i$.

Nach (8.39) gelten dann bezüglich $(x_i,\lambda_{i+1}) = (x_i,\lambda_i)$ die Aussagen von Hilfssatz VIII.3. Wegen der in (8.42) festgestellten Übereinstimmungen folgt daher aus (B7) von Hilfssatz VIII.3, daß die Folge (x_{i+k},λ_{i+1}) in $M(H,x_o,c)$ gegen ein $(x^*(\lambda_{i+1}),\lambda_{i+1})$ konvergiert mit $H(x^*(\lambda_{i+1}),\lambda_{i+1}) = 0$.

Nach (V2) ii) muß dann $x^*(\lambda_{i+1}) = x(\lambda_{i+1})$ gelten.

Folglich existiert zu $r > 0$ aus (8.58) ein $k_o \in \mathbb{N}$ mit

$$(8.59)\quad \forall\, k \geq k_o: \quad \|x_{i+k} - x(\lambda_{i+1})\| \leq r\,,$$

so daß

$$(8.60)\quad \forall\, k \geq k_o: \quad (x_{i+k},\lambda_{i+1}) \in S_r\,.$$

Mit der Regularitätskonstanten β zu S_r gilt daher

$$(8.61)\quad \forall\, k \geq k_o: \quad \|H_x^{-1}(x_{i+k},\lambda_{i+1})\| \leq \beta\,.$$

Wie im Beweis von (A1) zu Satz VIII.6 folgt aus Hilfssatz VIII.3 außerdem:

$$(8.62)\quad \forall\, k \in \mathbb{N}: \quad (x_{i+k},\lambda_{i+1}) \in M(H,x_o,c)$$

$$(8.63)\quad \forall\, k \in \mathbb{N}: \quad \|H(x_{i+k},\lambda_{i+1})\| = \|H(x_{i,k},\lambda_{i+1})\| \leq \frac{1}{4^k}\,\|H(x_i,\lambda_{i+1})\|$$

und

$$(8.64)\quad \forall\, k \in \mathbb{N}: \quad \eta_{i+k}(\lambda_{i+1}) \leq K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\ \beta_{i,k}\ \zeta_{i,k}\,.$$

In Verbindung mit (8.61), (8.62) und (8.63) erhält man daher aus (8.64):

$\forall\, k \geq k_o$:

$$\begin{aligned}\eta_{i+k}(\lambda_{i+1}) &\leq K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\ \|H_x^{-1}(x_{i,k},\lambda_{i+1})\|^2\ \|H(x_{i,k},\lambda_{i+1})\| \\ &\leq \kappa\,\beta^2\,\|H(x_{i,k},\lambda_{i+1})\| \\ &\leq \frac{1}{4^k}\,\kappa\,\beta^2\,c\,.\end{aligned}$$

Also folgt auch hier die Existenz eines $k_1 \geq k_o$ mit

(8.65) $\eta_{i+k_1}(\lambda_{i+k_1+1}) = \eta_{i+k_1}(\lambda_{i+1}) \leq \frac{1}{4^{k_1}} \kappa \beta^2 c < \frac{1}{2} \rho$.

Ähnlich wie in Satz VIII.6 ergibt sich hieraus ein Widerspruch zwischen der Annahme und (6.24), wonach

(8.66) $\lambda_{i+k_1+1} \geq \min \{ \overline{\lambda}_{i+k_1+1}, \frac{1}{2}(\lambda_{i+k_1} + 1_{i+k_1}) \}$ falls

$\eta_{i+k_1}(\lambda_{i+k_1+1}) < \frac{1}{2} \rho$.

Es ist nämlich sowohl $\overline{\lambda}_{i+k_1+1}$ als auch $\frac{1}{2}(\lambda_{i+k_1} + 1_{i+k_1})$ größer als λ_{i+k_1}. Einerseits ist $\overline{\lambda}_{i+k_1+1} = \lambda_{i+k_1} + \Delta\lambda_{i+k_1}$ mit $\Delta\lambda_{i+k_1} \geq \min \{ \frac{3c}{4\gamma}, 1-\lambda_{i+k_1} \}$ nach (B1) von Hilfssatz VIII.4, wobei $\Delta\lambda_{i+k_1} > 0$, da nach Annahme $1 - \lambda_{i+k_1} = 1 - \lambda_i > 0$.

Andererseits ist $1_{i+k_1} > \lambda_{i+k_1} = \lambda_{i+1}$, denn da H auf S_r regulär ist, existiert nach (8.60) $H_x^{-1}(x_{i+k_1}, \lambda_{i+k_1}) \in L(Z,X)$ und es ist H_x in $(x_{i+k_1}, \lambda_{i+k_1})$ stetig. Aus Satz IV.17 (Banach-Lemma) folgt daher die Existenz von $H_x^{-1}(x_{i+k_1}, \lambda) \in L(Z,X)$ für λ aus einer geeigneten Umgebung von λ_{i+k_1} und nach Definition muß deshalb $1_{i+k_1} > \lambda_{i+k_1}$ sein.

Aus (8.66) folgt somit im Gegensatz zur Annahme, daß jedes $\lambda_i < 1$ durch EV2 spätestens nach endlich vielen Schritten vergrößert wird.

Zu (A2):

Die Folge $\{ \lambda_i \mid i \in \mathbb{N} \}$ ist monoton nicht fallend und durch 1 beschränkt. Also existiert

$\overline{\lambda} = \sup \{ \lambda_i \mid i \in \mathbb{N} \} \leq 1$

und es gilt

(8.67) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists i(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall i \geq i(\varepsilon) : \quad \overline{\lambda} - \lambda_i \leq \varepsilon$.

Wählt man $\varepsilon_o := \frac{3c}{4\gamma}$ und $i_o := i(\varepsilon_o)$, so folgt also

$\forall i \geq i_o : \quad \overline{\lambda} - \lambda_i \leq \frac{3c}{4\gamma}$.

Da außerdem wegen $\bar{\lambda} \leq 1$

$$\forall\, i \geq i_o : \quad \bar{\lambda} - \lambda_i \leq 1 - \lambda_i ,$$

erhält man mit (B1) von Hilfssatz VIII.4

$$\forall\, i \geq i_o : \quad \bar{\lambda} - \lambda_i \leq \min \{ \tfrac{3}{4}\tfrac{c}{\gamma} , 1-\lambda_i \} \leq \Delta\lambda_i .$$

Daraus folgt

(8.68) $\quad \exists\, i_o \in \mathbb{N}\ \forall\, i \geq i_o : \quad \bar{\lambda} \leq \lambda_i + \Delta\lambda_i = \bar{\lambda}_{i+1}$

Für den weiteren Beweis von (A2) ist der Nachweis der folgenden Aussagen nützlich:

(8.69) $\quad \forall\, i \in \mathbb{N} : \quad \|H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})\| \leq 2\,\beta_o$ mit β_o nach (8.54)

(8.70) $\quad \lim\limits_{i\to\infty} \|H(x_i,\lambda_{i+1})\| = 0$

(8.71) $\quad \lim\limits_{i\to\infty} \zeta_i(\lambda_{i+1}) = 0$

(8.72) $\quad \lim\limits_{i\to\infty} \eta_i(\lambda_{i+1}) = 0$

(8.73) $\quad \lim\limits_{i\to\infty} (x_i,\lambda_{i+1}) = (x(\bar{\lambda}),\bar{\lambda})$

(8.74) $\quad \exists\, i_1 \in \mathbb{N}\ \forall\, i \geq i_1 : \quad l_i > \bar{\lambda}_{i+1}$

Zu (8.69):

Annahme : $\exists\, i \in \mathbb{N}$ mit $\|H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})\| > 2\,\beta_o$.

Dann gilt unter Berücksichtigung von (8.54) sowie von (B8) von Hilfssatz VIII.3:

$$\|H_x^{-1}(x(\lambda_{i+1}),\lambda_{i+1})\ (H_x(x(\lambda_{i+1}),\lambda_{i+1}) - H_x(x_i,\lambda_{i+1}))\| \leq$$

$$\leq \beta_o\ K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\ 2\ \zeta_i(\lambda_{i+1})$$

$$< \tfrac{1}{2}\ \|H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})\|\ K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\ 2\ \zeta_i(\lambda_{i+1})$$

$$= \beta_i(\lambda_{i+1})\ K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\ \zeta_i(\lambda_{i+1})$$

$$= \eta_i(\lambda_{i+1}) \leq \tfrac{1}{2} \quad \text{nach (6.23)} .$$

Also folgt nach Satz (IV.17) (Banach-Lemma), daß

$$\|H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})\| \leq \frac{1}{1 - \eta_i(\lambda_{i+1})}\ \|H_x^{-1}(x(\lambda_{i+1}),\lambda_{i+1})\| \leq 2\,\beta_o$$

im Widerspruch zur Annahme.

Zu (8.70):

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist zu zeigen

(8.75) $\quad \exists\, i_1 \in \mathbb{N}\ \forall\, i \geq i_1 : \quad \|H(x_i,\lambda_{i+1})\| \leq \varepsilon$.

Wegen $\overline{\lambda} = \lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i$ gilt:

$$\exists\, i_o \in \mathbb{N}\ \forall\, i \geq i_o : \quad |\lambda_{i+1} - \lambda_i| \leq |\overline{\lambda} - \lambda_i| \leq \frac{\varepsilon}{4\gamma} .$$

Weil $\forall\, i \in \mathbb{N}$: $\quad [(x_i,\lambda_i),(x_i,\lambda_{i+1})] \in M(H,x_o,c)$

gilt daher mit (V2) und (V3) für alle $i \geq i_o$:

$$\|H(x_i,\lambda_{i+1})\| \leq \|H(x_i,\lambda_i)\| + \sup_{\tilde{\lambda}\in[\lambda_i,\lambda_{i+1}]} \|H_\lambda(x_i,\tilde{\lambda})\|\ (\lambda_{i+1} - \lambda_i)$$

$$\leq \|H(x_i,\lambda_i)\| + \gamma\ (\lambda_{i+1} - \lambda_i)$$

$$\leq \|H(x_i,\lambda_i)\| + \frac{\varepsilon}{4} .$$

Nach (B4) von Hilfssatz VIII.4 gilt wegen (8.39) außerdem

$$\forall\, i \in \mathbb{N} : \quad \|H(x_i,\lambda_i)\| \leq \frac{1}{4}\, \|H(x_{i-1},\lambda_i)\| ,$$

so daß insgesamt

$$\forall\, i \geq i_o : \quad \|H(x_i,\lambda_{i+1})\| \leq \frac{1}{4}\, \|H(x_{i-1},\lambda_i)\| + \frac{\varepsilon}{4} .$$

Daraus erhält man rekursiv

$$\forall\, i \geq i_o : \quad \|H(x_i,\lambda_{i+1})\| \leq \frac{1}{4^{i-i_o+1}}\, \|H(x_{i_o-1},\lambda_{i_o})\| + \sum_{j=0}^{i-i_o} \frac{1}{4^j}\frac{\varepsilon}{4}$$

$$\leq \frac{1}{4^{i-i_o}}\, c + \frac{\varepsilon}{4} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j}$$

$$= \frac{1}{4^{i-i_o}}\, c + \frac{\varepsilon}{3} .$$

Wählt man nun $i_1 \in \mathbb{N}$ so groß, daß

$\frac{1}{4^{i_1-i_o}}\, c \leq \frac{2}{3}\varepsilon$, so gilt

$$\forall\, i \geq i_1 : \quad \|H(x_i,\lambda_{i+1})\| \leq \varepsilon$$

und damit (8.75).

Zu (8.71):

Mit (8.69) gilt

$$\forall\, i \in \mathbb{N}: \quad 0 \le \zeta_i(\lambda_{i+1}) = \|H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})\, H(x_i,\lambda_{i+1})\|$$

$$\le \|H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})\|\, \|H(x_i,\lambda_{i+1})\|$$

$$\le 2\,\beta_o\, \|H(x_i,\lambda_{i+1})\| \,.$$

Hieraus folgt (8.71) wegen (8.70).

Zu (8.72):

Nach (V3) und (8.69) ist

$$\forall\, i \in \mathbb{N}: \quad 0 \le \eta_i(\lambda_{i+1}) = K2(x_i,\lambda_{i+1},2\zeta_i(\lambda_{i+1}))\, \beta_i(\lambda_{i+1})\, \zeta_i(\lambda_{i+1})$$

$$\le \kappa\, 2\, \beta_o\, \zeta_i(\lambda_{i+1})$$

Also folgt auch (8.72) wegen (8.71).

Zu (8.73):

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist zu zeigen:

(8.76) $\quad \exists\, i_o \in \mathbb{N}\ \forall\, i \ge i_o: \quad \|(x_i,\lambda_{i+1}) - (x(\bar\lambda),\bar\lambda)\| \le \varepsilon \,.$

Wie in (8.57) festgestellt, ist die Lösung x in $\bar\lambda$ stetig. Also existiert ein $\delta(\varepsilon) > 0$, so daß

$$\|x(\lambda) - x(\bar\lambda)\| \le \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{falls } \lambda \in [0,1] \text{ und } |\lambda - \bar\lambda| \le \delta(\varepsilon) \,.$$

Nach (8.67) existiert zu $\delta(\varepsilon)$ ein $i_1 = i_1(\delta(\varepsilon))$, so daß

$$\forall\, i \ge i_1: \quad |\lambda_i - \bar\lambda| \le \delta(\varepsilon) \quad \text{und damit}$$

(8.77) $\quad \forall\, i \ge i_1: \quad \|x(\lambda_i) - x(\bar\lambda)\| \le \frac{\varepsilon}{3} \,.$

Ebenfalls nach (8.67) existiert zu $\frac{\varepsilon}{3}$ ein $i_2 = i_2(\frac{\varepsilon}{3})$, so daß

(8.78) $\quad \forall\, i \ge i_2: \quad |\lambda_i - \bar\lambda| \le \frac{\varepsilon}{3} \,.$

Wegen (8.71) existiert schließlich ein $i_3 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall\, i \ge i_3: \quad \zeta_i(\lambda_{i+1}) \le \frac{\varepsilon}{6} \,.$$

Da nach (B7) von Hilfssatz VIII.3

$$\|x_i - x(\lambda_{i+1})\| \le 2\, \zeta_i(\lambda_{i+1}) \,,$$

ergibt sich somit

$$(8.79) \quad \forall\, i \geq i_3 : \quad \|x_i - x(\lambda_{i+1})\| \leq \frac{\varepsilon}{3} .$$

Setzt man nun $i_o := \max \{ i_1, i_2, i_3 \}$, so gilt mit (8.77), (8.78) und (8.79)

$$\forall\, i \geq i_o : \quad \|(x_i,\lambda_{i+1}) - (x(\overline{\lambda}),\overline{\lambda})\| \leq$$

$$\leq \|(x_i,\lambda_{i+1}) - (x(\lambda_{i+1}),\lambda_{i+1})\| + \|(x(\lambda_{i+1}),\lambda_{i+1}) - (x(\lambda_{i+1}),\overline{\lambda})\| +$$

$$+ \|(x(\lambda_{i+1}),\overline{\lambda}) - (x(\overline{\lambda}),\overline{\lambda})\|$$

$$\leq \|x_i - x(\lambda_{i+1})\| + |\lambda_{i+1} - \overline{\lambda}| + \|x(\lambda_{i+1}) - x(\overline{\lambda})\|$$

$$\leq \varepsilon .$$

Zu (8.74):

Nach (B2) von Hilfssatz VIII.7 ist H auf $\overline{S}((x(\overline{\lambda}),\overline{\lambda}),r)$ regulär. Wegen (8.73) existiert ein $i_2 \in \mathbb{N}$, so daß

$$(8.80) \quad \forall\, i \geq i_2 : \quad \|(x_i,\lambda_{i+1}) - (x(\overline{\lambda}),\overline{\lambda})\| \leq \frac{r}{4} .$$

Ferner existiert nach Definition von $\overline{\lambda}$ wegen der Monotonie der Folge $\{ \lambda_i \mid i \in \mathbb{N} \}$ ein $i_3 \in \mathbb{N}$ mit

$$(8.81) \quad \forall\, i \geq i_3 : \quad \overline{\lambda} - \lambda_i < \frac{r}{4} .$$

Nach (8.72) gibt es außerdem ein $i_4 \in \mathbb{N}$, so daß

$$(8.82) \quad \forall\, i \geq i_4 : \quad \eta_i(\lambda_{i+1}) < \frac{1}{2}\rho .$$

Mit $i_1 := \max \{ i_2, i_3, i_4 \}$ gilt daher

$$(8.83) \quad \forall\, i \geq i_1 : \quad l_i \geq \lambda_{i+1} + \frac{r}{2} .$$

Ist nämlich $\lambda \in [\lambda_i,\lambda_{i+1}]$, so existiert $H_x^{-1}(x_i,\lambda) \in L(Z,X)$, da $\lambda_{i+1} < l_i$ nach EV2.

Ist andererseits $\lambda \in [\lambda_{i+1},\lambda_{i+1} + \frac{r}{2}]$, so ist wegen (8.80)

$$\|(x_i,\lambda) - (x(\overline{\lambda}),\overline{\lambda})\| \leq \|(x_i,\lambda) - (x_i,\lambda_{i+1})\| + \|(x_i,\lambda_{i+1}) - (x(\overline{\lambda}),\overline{\lambda})\|$$

$$\leq \frac{r}{2} + \frac{r}{4} < r ,$$

so daß $(x_i,\lambda) \in S((x(\overline{\lambda}),\overline{\lambda}),r)$.

Wegen der Regularität von H auf $\overline{S}((x(\overline{\lambda}),\overline{\lambda}),r)$ existiert dann auch $H_x^{-1}(x_i,\lambda) \in L(Z,X)$.

Also existiert $H_x^{-1}(x_i,\lambda) \in L(Z,X)$ sicher für alle $\lambda \in [\lambda_i, \lambda_{i+1} + \frac{r}{2}]$, so daß (8.83) folgt.

Nimmt man nun an, (8.74) sei falsch, so muß es zu obigem i_1 ein $i \geq i_1$ geben mit $l_i \leq \overline{\lambda}_{i+1}$.
Wegen (8.82) folgt dann aus (6.24) ii), daß

$$\lambda_{i+1} \geq \frac{1}{2}(\lambda_i + l_i) .$$

Mit (8.81) und (8.83) ergibt sich daraus

$$\lambda_{i+1} \geq \frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_{i+1} + \frac{r}{2}) \geq \lambda_i + \frac{r}{4} > \lambda_i + \overline{\lambda} - \lambda_i = \overline{\lambda} ,$$

was im Widerspruch zur Definition von $\overline{\lambda}$ steht.
Also gilt (8.74).

Betrachtet man nun zu i_o aus (8.68), i_1 aus (8.74) und i_4 aus (8.82) ein beliebiges $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq i_5 := \max\{ i_o, i_1, i_4 \}$, so folgt wegen (8.74) und (8.82) aus (6.24) i), daß $\lambda_{i+1} = \overline{\lambda}_{i+1}$ gelten muß. Nach (8.68) muß dann auch $\lambda_{i+1} = \overline{\lambda}$ sein, und wegen (A1) ist das nur möglich, wenn gleichzeitig auch $\overline{\lambda} = 1$ ist, da sonst λ_{i+1} nach endlich vielen Schritten durch EV2 über $\overline{\lambda}$ hinaus vergrößert würde.

Mithin gilt:

(8.84) $\quad \exists\, i_5 \in \mathbb{N}\ \forall\, i \geq i_5 : \quad \lambda_{i+1} = \overline{\lambda} = 1$

und (A2) ist bewiesen.

Die Lösungskonvergenz von EV2 folgt nun wegen (8.84) unmittelbar aus (8.73), denn es gilt:

$\lim_{i\to\infty} (x_i,\lambda_{i+1}) = (x(1),1)$ mit $H(x(1),1) = 0$. ▲

VIII.9 Bemerkungen

VIII.9.1

Entsprechend Bemerkung IV.16.3 gilt:

Ist H auf einer offenen Umgebung U von $M(H,x_o,c)$ bezüglich x zweimal stetig Fréchet-differenzierbar mit

(8.85) $\quad \forall\, (x,\lambda) \in U : \quad \|H_{xx}(x,\lambda)\| \leq \kappa ,$

so erfüllt H_x die Lipschitzbedingung L2(M(H,x_o,c)) mit

(8.86) $\forall\ (x,\lambda) \in U,\ \zeta \in \mathbb{R}_+^o$:

$$K2(x,\lambda,\zeta) := \sup \{ \|H_{xx}(x+y,\lambda)\| \mid \|y\| \leq \zeta,\ (x+y,\lambda) \in U \} .$$

VIII.9.2

Sind die Voraussetzungen von Satz VIII.6 oder von Satz VIII.8 erfüllt, so ist gemäß Aussage (A2) gesichert, daß ein $i_o \in \mathbb{N}$ existiert mit

$\forall\ i \geq i_o$: $\lambda_i = 1$.

Nach (6.20) von EV2 gilt dann wegen (4.1)

$$\begin{aligned} \forall\ i \geq i_o : \quad \Delta x_i(\lambda_{i+1}) &= - H_x^{-1}(x_i,\lambda_{i+1})\ H(x_i,\lambda_{i+1}) \\ &= - H_x^{-1}(x_i,1)\ H(x_i,1) \\ &= - F'(x_i)^{-1}\ F(x_i) . \end{aligned}$$

Folglich ist in EV2 der Übergang von x_i zu x_{i+1} gemäß Schritt 3 nach endlich vielen Schritten identisch mit dem Newton-Verfahren für die Funktion F.

Gemäß (B7) von Hilfssatz VIII.3 konvergiert die Folge
$\{ (x_{i_o+k},\lambda_{i_o+k}) \mid k \in \mathbb{N} \} = \{ (x_{i_o+k},1) \mid k \in \mathbb{N} \}$ gegen ein

$(x^*,1) \in M(H,x_o,c)$ mit $H(x^*,1) = F(x^*) = 0$.

Da aus den Voraussetzungen der Sätze VIII.6 und VIII.8 jeweils diejenigen von Hilfssatz VIII.7 folgen, existiert ein $r_o > 0$, so daß gilt:

(8.87) i) $\overline{S}((x^*,1),r_o) \subset M(H,x_o,c)$

ii) H ist auf $\overline{S}((x^*,1),r_o)$ regulär .

Wegen $F(x^*) = 0$ und der Stetigkeit von $\|F(.)\|$ im Punkte x^* existiert zur Regularitätskonstanten β von H auf $\overline{S}((x^*,1),r_o)$ sowie zur Lipschitzschranke κ für H_x nach (V3) und zu $r_1 < r_o/2$ ein Index $i_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$(8.88) \quad \forall\ i \geq i_1 : \quad x_i \in S(x^*,r_1) \quad \text{und} \quad \|F(x_i)\| \leq \min \{ \frac{r_1}{2\beta} , \frac{1}{2\beta^2\kappa} \} .$$

Für jedes $i \geq i_1$ gelten dann bezüglich x_i mit $r = r_1$ und den Konstanten β, $K := \kappa$ und $\zeta := \beta\ \|F(x_i)\|$ die Voraussetzungen von Satz IV.20, falls $\|F(x_i)\| \neq 0$.

Zunächst ist $S(x^*,r_1) \times \{1\} \subset \overline{S}((x^*,1),r_o)$, so daß wegen (8.87)

jeweils die koniare Inverse $H_x^{-1}(x_i,1) = F'(x_i)^{-1}$ von $H_x(x_i,1) = F'(x_i)$ existiert.

Es gilt ferner:

(V0): da $S(x_i,r_1) \subset S(x^*,r_o)$ nach Wahl von r_1 und (8.88)
und $\overline{S}((x^*,1),r_o) \subset M(H,x_o,c)$ nach (8.87) i)

(V2): wegen (8.87) nach Wahl von β

(V1): wegen $\|F'(x_i)^{-1} F(x_i)\| \leq \beta \|F(x_i)\| = \zeta$ nach (V2)

(V3): unter Verwendung von (4.17) und (4.19) wegen (V3) von Satz VIII.6 bzw. Satz VIII.8, weil $S(x_i,r_1) \times \{1\} \subset M(H,x_o,c)$ nach (8.87) i) und Wahl von i_1 sowie r_1

(V4): da $\beta \zeta \kappa = \beta^2 \kappa \|F(x_i)\| \leq \frac{1}{2}$ nach (8.88)

(V5): weil für $h \in (0,\frac{1}{2}]$:

$$\frac{1 - \sqrt{1-2h}}{h} \zeta \leq 2\zeta = 2\beta \|F(x_i)\| \leq r_1 \text{ nach (8.88)}$$

Analog zu Bemerkung VII.6.2 erhält man also:

Sind die Voraussetzungen von Satz VIII.6 bzw. Satz VIII.8 erfüllt, so ist in EV2 nach endlich vielen Schritten stets $\lambda_i = 1$ und die Zuordnungsvorschrift in Schritt 3 ist identisch mit dem Newton-Verfahren für F. Wenn nicht bereits nach endlich vielen Schritten $F(x_i) = 0$ gilt, so sind dabei dann nach ebenfalls endlich vielen Schritten für alle folgenden Iterierten die Voraussetzungen von Satz IV.20 erfüllt, und es können hierfür insbesondere die dort angegebenen Fehlerabschätzungen (B4) und (B5) angewendet werden.

VIII.9.3

Für (V2) von Satz VIII.8 ist es hinreichend, wenn gilt:

(V2)' i) H ist auf einer offenen Umgebung U_1 von $M(H,x_o,c)$ stetig Fréchet-differenzierbar

ii) $\forall \lambda \in [0,1]$ existiert $(x(\lambda),\lambda) \in M(H,x_o,c)$ mit $H(x(\lambda),\lambda) = 0$

iii) Es existiert $H_x^{-1}(x,\lambda) \in L(Z,X)$, falls $(x,\lambda) \in M(H,x_o,c)$ und $H(x(\lambda),\lambda) = 0$

iv) $(x,0) \in M(H,x_o,c)$ mit $H(x,0) = 0 \Rightarrow x = x_o$

Es genügt somit für die Eindeutigkeit der Lösung in $M(H,x_o,c)$, wenn diese im Punkte $\lambda_o = 0$ eindeutig bestimmt ist und außerdem H_x an

jeder in $M(H,x_o,c)$ liegenden Nullstelle von H eine koniare Inverse besitzt. Sind nämlich x_1 und x_2 Lösungen von H in $M(H,x_o,c)$, so können diese wegen (V2)' iii) nach Satz IV.18 (Satz über implizite Funktionen) lokal eindeutig in $M(H,x_o,c)$ auf das ganze Intervall $[0,1]$ stetig differenzierbar fortgesetzt werden und müssen deshalb ganz übereinstimmen, wenn sie nur in einem Punkte übereinstimmen.

VIII.9.4

Auf die in (V2) ii) erhobene Forderung der Eindeutigkeit der Lösung in $M(H,x_o,c)$ kann verzichtet werden, wenn in EV2 statt (6.23) gefordert wird, daß

(6.23)' $\quad \forall\, \lambda \in [\lambda_i,\lambda_{i+1}] : \quad \eta_i(\lambda) \leq \frac{1}{2}$.

(V2) ii) kann dann also ersetzt werden durch:

(V2) ii)' Es existiert eine stetige Lösung x von H mit $x(0) = x_o$.

Im Falle von (6.23)' sind nämlich die Voraussetzungen von Hilfssatz VIII.3 für alle λ aus $[\lambda_i,\lambda_{i+1}]$ erfüllt, und mit (B7) von Hilfssatz VIII.3 folgt daher für jedes $\lambda \in [\lambda_i,\lambda_{i+1}]$ ausgehend von (x_i,λ) die Konvergenz des Newton-Verfahrens gegen $(x^*(\lambda),\lambda)$ mit $H(x^*(\lambda),\lambda) = 0$. Mit Hilfe von Stetigkeitsüberlegungen läßt sich dann nachweisen, daß $x^*(\lambda)$ für alle $\lambda \in [\lambda_i,\lambda_{i+1}]$ mit den Werten $x(\lambda)$ der in (V2) ii)' vorgegebenen Lösung übereinstimmt.

Auf die Bedingung (6.23)' wurde in EV2 bewußt verzichtet, denn sie macht bei der Schrittweitensteuerung in jedem Schritt erhebliche theoretische Überlegungen erforderlich und führt über die durchzuführenden Abschätzungen in der Regel zu wesentlich kleineren λ - Schrittweiten als die Bedingung (6.23). Der besondere Vorteil von (6.23) besteht somit darin, daß nicht η_i über dem ganzen Intervall $[\lambda_i,\lambda_{i+1}]$ abzuschätzen ist, sondern lediglich an einer Stelle λ_{i+1} die Bedingung $\eta_i(\lambda_{i+1}) \leq \frac{1}{2}$ erfüllt werden muß. Dies gestattet es beispielsweise, λ_{i+1} iterativ - etwa mit dem Bisektionsverfahren - zu bestimmen.

VIII.9.5

Dadurch, daß λ_{i+1} in EV2 jeweils nur aus $[\lambda_i,\overline{\lambda}_{i+1}]$ gewählt werden kann, wird erreicht, daß das ganze Verfahren in $M(H,x_o,c)$ abläuft. Dadurch brauchen die Konvergenz - Voraussetzungen für jeden Iterationsschritt

jeweils nur bezüglich $S(x_i, 2\zeta_i(\lambda_{i+1})) \times \{\lambda_{i+1}\} \cap M(H, x_o, c)$ gefordert zu werden, so daß es ausreicht, wenn alle diese Voraussetzungen für $M(H, x_o, c)$ gelten.

Unterläßt man die einschränkende Bedingung, daß $\lambda_{i+1} \in [\lambda_i, \overline{\lambda}_{i+1}]$, so kann das Verfahren eventuell in größeren Schrittweiten $\Delta\lambda_{i+1}$ voranschreiten und so unter Umständen schneller konvergieren. Gleichzeitig läßt sich dann aber das Konvergenzverhalten des Verfahrens nicht mehr so ohne weiteres beschreiben. Der Normzuwachs für $H(x_i, \lambda)$ beim Übergang von λ_i zu λ_{i+1} ist dann nämlich nicht notwendig beschränkt. Außerdem bereitet es Schwierigkeiten, Bedingungen anzugeben, die sicherstellen, daß das Verfahren den (eventuell lokalen) Definitionsbereich von H nicht verläßt. Falls alle Iterierten wohldefiniert sind, so könnte dies z.B. abgesichert werden, wenn

$$S_o := \bigcup_{i=0}^{\infty} \overline{S}(x_i, 2\zeta_i(\lambda_{i+1})) \times \{\lambda_{i+1}\} \subset D \times J$$

gilt. Weil S_o aber a-priori nicht faßbar ist (die Kugeln $\overline{S}(x_i, 2\zeta_i(\lambda_{i+1}))$ hängen von den Iterierten ab, deren Verlauf nicht vorherbestimmt werden kann) läßt sich eine Bedingung dieser Art a-priori nur schlecht realisieren. Eine Ausführbarkeitsaussage kann dann diesbezüglich sinnvollerweise nur dergestalt gemacht werden, daß für die einzelnen Iterationsschritte die lokalen Konvergenzvoraussetzungen abzusichern sind und gefordert wird, daß dies für alle Iterierten möglich ist.

Aussagen dieser Art finden sich z.B. bei GRIFKA [25] mit Satz 3.4 und Satz 3.7. In dem dort betrachteten Einbettungsverfahren wird aber jeweils $\lambda_{i+1} \in [\lambda_i, 1]$ so bestimmt, daß (6.23)' erfüllt ist. Das bedeutet, daß bei diesem Verfahren zur Abschätzung von $H_x^{-1}(x, \lambda)$ für $\lambda \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ in der Regel Satz IV.17 (Banach-Lemma) herangezogen werden muß. Hieraus resultieren normalerweise trotz der Tatsache, daß $\lambda_{i+1} \in [\lambda_i, \overline{\lambda}_{i+1}]$ nicht gefordert wird, erheblich kleinere Schrittweiten als bei EV2.

Somit ist das dort angegebene Verfahren im allgemeinen in doppelter Hinsicht numerisch aufwendiger als EV2:
durch den höheren Aufwand bei der Schrittweitensteuerung und durch die wegen der kleineren Schrittweiten bedingte höhere Zahl von Iterationen.

VIII.9.6

Wie in Hilfssatz VIII.7 festgestellt, folgt aus Voraussetzung (V2) von Satz VIII.8 die Existenz eines Schlauches S_r um die Lösung x, auf dem die Einbettung H regulär ist. Unterstellt man einmal, der Radius des Schlauches und die Regularitätskonstante β für H auf S_r seien bekannt, so ist es möglich, die Schrittweiten $\Delta\lambda_i$ für ein modifiziertes Einbettungsverfahren (EV2)' so zu steuern, daß das ganze Verfahren innerhalb von S_r abläuft. Wegen $S_r \subset D \times J$ kann dann auf Voraussetzung (V1) in Satz VIII.8 verzichtet werden, und (V3) sowie (V4) müssen nur bezüglich S_r erfüllt sein, so daß es genügt, wenn gilt:

(V3)' H_x **erfüllt die** Lipschitzbedingung $L2(S_r)$

(V4)' Es existiert eine positive Konstante γ mit

$$\forall\ (x,\lambda) \in S_r : \quad \|H_\lambda(x,\lambda)\| \leq \gamma\ .$$

Für den Fall, daß $X = \mathbb{R}^n$ sind die so modifizierten Voraussetzungen von Satz VIII.8 dann vergleichbar mit denen von Theorem 4.3 bei AVILA in [4]. Das dort angegebene Einbettungsverfahren (vergl. (43a) und (43b) in [4]) arbeitet mit einer festen Schrittweite $\Delta\lambda$, die so justiert ist, daß der Schlauch S_r durch die jeweils bei $(x_i, i\,\Delta\lambda)$ ausgeführten Newton-Schritte nicht verlassen wird. Bezugnehmend auf die Regularitätskonstante β für S_r, sowie auf die Konstante γ aus (V4)' und die Lipschitzschranke κ nach (V3)' wird dies dadurch erreicht, daß

$\Delta\lambda$ aus $\left[0, \dfrac{1}{2\,\gamma\,\beta^2\,\kappa}\right]$ so gewählt wird, daß gilt

$$(8.89) \qquad \frac{1}{\beta\,\kappa}\left[\,1 - \sqrt{1 - 2\,\gamma\,\beta^2\kappa\,\Delta\lambda}\,\right] < r\ .$$

Wie man (8.89) sofort ansieht, ist zur Wahl einer geeigneten Schrittweite $\Delta\lambda$ für das von AVILA vorgeschlagene Einbettungsverfahren die Kenntnis der globalen Konstanten r, γ, β und κ erforderlich. Normalerweise sind aber gerade diese Größen nicht bekannt, so daß dieses Verfahren nicht sonderlich praktikabel ist. Selbst wenn man unterstellt, daß es möglich ist, die benötigten Größen durch hinreichend groß gewählte Konstanten abzuschätzen, so hat das Verfahren zusätzlich den gravierenden Nachteil, daß die - äquidistant gewählte - Schrittweite $\Delta\lambda$ an der kritischsten Stelle des Schlauches S_r ausgerichtet sein muß, so daß die Schrittweiten bei den meisten Iterationen unnötig klein ausfallen.

Verglichen mit dem Verfahren von AVILA bietet EV2 den Vorteil, daß die Schrittweite $\Delta\lambda_i$ jeweils den lokalen Gegebenheiten angepaßt ist. Dadurch kann bei der Schrittweitenwahl einerseits auf globale Größen verzichtet werden, und andererseits ist es möglich, die jeweils lokal größtmögliche Schrittweite zu verwenden. EV2 hat damit gegenüber dem Verfahren von AVILA praktikable Anwendungsvoraussetzungen und führt darüber hinaus zu größeren Schrittweiten, was den Gesamtaufwand normalerweise verringert.

VIII.9.7

Da aus den Voraussetzungen des in [19] von FEILMEIER - LORY - SCHEURING - WACKER angegebenen Satzes 2.2.1 auch diejenigen von Satz VIII.6 folgen, gelten die in Bemerkung VII.6.3 gemachten Feststellungen sinngemäß ebenso in bezug auf einen Vergleich des Verfahrens aus [19] mit EV2.

IX. GEDÄMPFTE NEWTON-ÄHNLICHE VERFAHREN ALS SPEZIELLE EINBETTUNGSVERFAHREN

Zu jeder beliebigen Funktion $F : D \to Z$ wird auf $D \times J$ zu $x_0 \in D$ durch

(9.1) $\quad \forall\ (x,\lambda) \in D \times J : \quad H(x,\lambda) := F(x) - (1-\lambda)\, F(x_0)$

eine (affine) Einbettung für F bezüglich x_0 definiert.

Für diese Einbettung gilt:

(9.2) $\quad \forall\ (x,\lambda) \in D \times J : \quad H_x(x,\lambda) = F'(x)$

(9.3) $\quad \forall\ (x,\lambda) \in D \times J : \quad H_\lambda(x,\lambda) = F(x_0)$.

Wählt man nun zu H die Konstante $c := \|F(x_0)\|$ und bestimmt nach Schritt 1 aus EV1 zu $\lambda_0 = 0$ den Wert λ_1, so stellt man fest, daß $\Delta\lambda_0 = 1$ und damit $\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda_0 = 1$ gesetzt wird.

Es ist nämlich für $\delta \in [0,1-\lambda_0] = [0,1]$:

$$P(x_0,\lambda_0,\delta) = P(x_0,0,\delta) = \{x_0\} \times [0,\delta] \cap M(H,x_0,c)$$

und

$$\gamma_0(\delta) = \|F(x_0)\| = c\ .$$

Weil außerdem $\|H(x_0,\lambda_0)\| = 0$ ist, folgt

$$\begin{aligned} Q(x_0,\lambda_0) &= \{\, \delta \in [0,1] \mid \delta\ \gamma_0(\delta) \le c \,\} \\ &= \{\, \delta \in [0,1] \mid \delta\ c \le c \,\} \\ &= [0,1]\ , \end{aligned}$$

so daß nach (6.12)

$$\Delta\lambda_0 := \max Q(x_0,\lambda_0) = \max [0,1] = 1\ .$$

Das bedeutet, daß EV1 für diesen Fall in $D \times \{1\} \cap M(H,x_0,\|F(x_0)\|)$ abläuft und die Form

(9.4) $\quad x_{i+1} := x_i - \mu_i\ \Gamma_i\ H(x_i,1) = x_i - \mu_i\ \Gamma_i\ F(x_i)$

hat.

Dabei ist Γ_i eine Näherung zu $H_x^{-1}(x_i,1) = F'^{-1}(x_i)$ mit

$$\|I - F'(x_i)\ \Gamma_i\| \le d\ .$$

Es handelt sich also bei (9.4) um ein gedämpftes Newton-ähnliches Verfahren für F, das bei Wahl von $d := 0$ in ein gedämpftes Newton-Verfahren übergeht.

Da sich für diesen Spezialfall in EV1 die Schrittweitensteuerung bezüglich λ erübrigt und alle Größen für H auf entsprechende für F zurückgeführt werden können, soll EV1 hierfür als EV3 gesondert formuliert werden.

IX.1 Das Einbettungsverfahren EV3

Gegeben seien Funktionen $F : D \to Z$, $K3 : D \times X \times [0,1] \to \mathbb{R}$ sowie $x_0 \in D$.

Schritt 0: Setze $i := 0$
Wähle $d, q, \varrho \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq d < q < 1$ und $0 < \varrho < 1$.

Schritt 1: Wähle $\Gamma_i \in L(Z,X)$ mit

(9.5) $\quad \|I - F'(x_i)\,\Gamma_i\| \leq d$.

Schritt 2: Berechne $\Delta x_i := -\Gamma_i F(x_i)$, $\|\Delta x_i\|$ und $\|\Gamma_i\|$.
Für $\mu \in [0,1]$ setze

(9.6) $\quad \eta_i(\mu) := \mu\, K3(x_i, \Delta x_i, \mu)\, \|\Gamma_i\|\, \|\Delta x_i\|$

und bestimme $\mu_i \in [0,1]$ so, daß

(9.7) $\quad \forall\, \mu \in [0,\mu_i] : \quad \eta_i(\mu) \leq 2\,(q - d)$ und

(9.8) $\quad \varrho\, 2\,(q - d) \leq \eta_i(\mu_i)$ falls $\mu_i < 1$.

Setze $x_{i+1} := x_i + \mu_i \Delta x_i$, erhöhe i um 1 und gehe zu Schritt 1.

Weil EV3 ein Spezialfall von EV1 ist, stellt selbstverständlich Satz VII.5 auch eine Ausführbarkeitsaussage für EV3 dar. Hierbei ist die für EV3 erforderliche Lipschitzfunktion K3 mit Hilfe der nach (V3) von Satz VII.5 existierenden Lipschitzfunktion K1 definiert durch

(9.9) $\quad \forall\, (x,\Delta x,\mu) \in D \times X \times [0,1] : \quad K3(x,\Delta x,\mu) := K1(x,1,\Delta x,\mu)$.

Bei Anwendung von Satz VII.5 wird aber der speziellen Form von EV3 bezüglich der Voraussetzungen nicht Rechnung getragen. Die Tatsache, daß alle Iterationsschritte von EV3 lediglich für den Wert $\lambda = 1$ auszuführen sind, gestattet es, die Forderungen in den Voraussetzungen von Satz VII.5 auf entsprechend reduzierte Bereiche einzuschränken.

Dies soll nach der Angabe einiger EV3 angepaßter Definitionen in Satz X.6 des nächsten Kapitels geschehen.

Für den Fall, daß in EV3 d = 0 gewählt ist, d.h. falls EV3 ein gedämpftes Newton-Verfahren darstellt, kann man die sich ergebenden Voraussetzungen eventuell noch weiter abschwächen, wenn EV3 bezüglich der Wahl des Dämpfungsfaktors geringfügig modifiziert wird zu EV4 :

IX.2 Das Einbettungsverfahren EV4

Gegeben seien Funktionen $F : D \to Z$, $K3 : D \times X \times [0,1] \to \mathbb{R}$ sowie $x_0 \in D$.

Schritt 0: Setze $i := 0$, $a_0 := 1$, $b_0 := 0$, $k_0 := 0$.

Wähle $q, \rho \in (0,1)$.

Schritt 1: Bestimme $F'^{-1}(x_i)$.

Berechne $\Delta x_i := - F'^{-1}(x_i)\, F(x_i)$, $\|\Delta x_i\|$ und $\|F'^{-1}(x_i)\|$.

Es sei

(9.10) $m_i := \frac{1}{a_i}(1 - b_i)$.

Für $\mu \in [0,m_i]$ setze

(9.11) $\eta_i(\mu) := \mu\, K3(x_i, \Delta x_i, \mu)\, \|F'^{-1}(x_i)\|\, \|\Delta x_i\|$

und bestimme $\mu_i \in [0,m_i]$ so, daß

(9.12) $\forall\ \mu \in [0,\mu_i] : \quad \eta_i(\mu) \le 2q$ und

(9.13) $\rho\, 2q \le \eta_i(\mu_i)$ falls $\mu_i < m_i$.

Schritt 2: Setze

(9.14) $x_{i+1} := x_i + \mu_i \Delta x_i$ und

(9.15) $\alpha_i := 1 - (1 - q)\, \mu_i$.

Falls $\mu_i = m_i$ setze:

(9.16) $a_{i+1} := 1$,

(9.17) $b_{i+1} := 0$ und

(9.18) $k_{i+1} := k_i + 1$.

Falls $\mu_i < m_i$ setze:

(9.19) $a_{i+1} := a_i \alpha_i$,

(9.20) $b_{i+1} := b_i + \mu_i a_i$ und

(9.21) $k_{i+1} := k_i$.

Erhöhe i um 1 und gehe zu Schritt 1.

Durch die jeweilige Einschränkung des Auswahlintervalls für den Dämpfungsfaktor μ_i auf $[0,m_i]$ ist es möglich, eine Kugelumgebung $\overline{S}(x_o,r)$ um den Startwert x_o anzugeben, in dem alle Iterierten x_i, sowie die jeweiligen Verbindungsgeraden von x_i zu x_{i+1} enthalten sind. Auf diese Weise erhält man für EV4 eine im Vergleich zur Niveaumenge $M(H,x_o,c)$ numerisch leichter faßbare Menge, auf der die Ausführbarkeitsvoraussetzungen erforderlich sind. Ein entsprechender Ausführbarkeitssatz wird mit Satz X.10 im nächsten Kapitel bewiesen.

X. AUSFÜHRBARKEITSAUSSAGEN FÜR DIE EINBETTUNGSVERFAHREN EV3 UND EV4

In diesem Kapitel werden analog zu Satz VII.5 Ausführbarkeitsaussagen für EV3 und EV4 formuliert und bewiesen. Hierzu ist es sinnvoll, in Anlehnung an Kapitel IV einige Begriffe auf die spezielle Form von EV3 und EV4 bezogen neu zu definieren.

X.1 Definition:

Zu $F : D \to Z$ und $\overline{x} \in D$ sei

(10.1) $M_0(F,\overline{x}) := \{ x \in D \mid \|F(x)\| \leq \|F(\overline{x})\| \}$.

Dann bezeichnet $M(F,\overline{x})$ die Zusammenhangskomponente von $M_0(F,\overline{x})$, in der $\overline{x}$ enthalten ist.

$M(F,\overline{x})$ heißt Niveaumenge für F bezüglich $\overline{x}$.

X.2 Definition:

Es sei $F : D \to Z$ und $M \subset D$.

Dann heißt F auf M regulär dund gilt:

(10.2) F ist auf einer offenen Umgebung U von M stetig Fréchet-differenzierbar

(10.3) Es existiert eine Konstante β ($= \beta(M)$) > 0, so daß gilt: $\forall\, x \in M$ besitzt $F'(x)$ eine koniare Inverse $F'^{-1}(x)$ mit $\|F'^{-1}(x)\| \leq \beta$.

Die Konstante β heißt Regularitätskonstante zu F auf M .

X.3 Definition:

Es seien X, Z Banachräume, $\emptyset \neq D$ offen $\subset X$, $T : D \to Z$, $M \subset D$.

Dann sagt man T erfüllt die Lipschitzbedingung L3(M) dund

a) eine offene Umgebung U von M mit $U \subset D$,

b) eine Funktion $K3 : U \times X \times [0,1] \to \mathbb{R}_+^0$ und

c) eine positive Konstante $\varkappa$

existieren, so daß für alle $x \in M$, $y \in X$, $\mu, \mu_1, \mu_2 \in [0,1]$ gilt:

(10.4) Falls $(x + \tau y) \in U$ für alle $\tau \in [0,\mu]$, so ist K1 stetig in

(x,y,μ) und es gilt

$$\forall\, \tau \in [0,\mu]: \quad \|T(x+\tau y) - T(x)\| \leq K3(x,y,\mu)\, \|\tau y\|$$

(10.5) $$\mu_1 \leq \mu_2 \Rightarrow K3(x,y,\mu_1) \leq K3(x,y,\mu_2)$$

(10.6) Falls $(x+\tau y) \in M$ für alle $\tau \in [0,\mu]$, so gilt

$$K3(x,y,\mu) \leq \varkappa .$$

X.4 Bemerkung

Falls ein Operator T auf einer offenen Umgebung U von M stetig Fréchet-differenzierbar ist mit

(10.7) $$\forall\, x \in M: \quad \|T'(x)\| \leq \varkappa ,$$

so gilt infolge des Mittelwertsatzes (vergl. z.B. DIEUDONNE [16], 8.5.2):

T erfüllt die Lipschitzbedingung L3(M) mit

(10.8) $\forall\, x \in U,\ y \in X,\ \mu \in [0,1]$:

$$K3(x,y,\mu) := \sup \{ \|T'(x+ty)\| \mid t \in [0,\mu],\ (x+ty) \in M \} .$$

Weil bei EV3 und EV4 keine Schrittweitensteuerung bezüglich des Einbettungsparameters λ erforderlich ist, sind auch die Begriffe der Wohldefiniertheit, Lösungskonvergenz und Ausführbarkeit entsprechend Definition IV.11 passend umzuformulieren. Also:

X.5 Definition:

Das Verfahren EV3 bzw. EV4 heißt für einen Startwert $x_0 \in D$ wohldefiniert dund die Zuordnungsvorschrift von x_i zu x_{i+1} ausgehend von x_0 für alle $i \in \mathbb{N}_0$ wohldefiniert ist.

Ist EV3 bzw. EV4 für einen Startwert x_0 wohldefiniert, so heißt das Verfahren für x_0 lösungskonvergent dund die Folge $\{ x_i \mid i \in \mathbb{N}_0 \}$ in der Norm auf X gegen ein $x^* \in D$ konvergiert mit $F(x^*) = 0$.

Das Verfahren EV3 bzw. EV4 heißt für einen Startwert $x_0 \in D$ ausführbar dund es für x_0 wohldefiniert und lösungskonvergent ist.

EV3 bzw. EV4 heißt auf einer Menge $M \subset D$ ausführbar dund es für jedes $x_0 \in M$ ausführbar ist.

Mit Hilfe der vorstehenden Definitionen ist es nun möglich, einen Ausführbarkeitssatz für EV3 anzugeben, dessen Voraussetzungen im Vergleich zu Satz VII.5 erheblich abgeschwächt sind.

X.6 Ausführbarkeitssatz für EV3

Es seien X, Z Banachräume, $\emptyset \neq D$ offen $\subset X$, $F : D \to Z$, $\overline{x} \in D$.

Es gelte

(V1) $M(F,\overline{x})$ ist abgeschlossen

(V2) F ist auf $M(F,\overline{x})$ regulär

(V3) F' erfüllt die Lipschitzbedingung $L3(M(F,\overline{x}))$

(B1) Dann gilt:

Das Einbettungsverfahren EV3 ist mit F und der nach (V3) gemäß Definition X.3 existierenden Funktion K3 auf $M(F,\overline{x})$ ausführbar.

Beweis:

Der Beweis zu Satz X.6 verläuft weitgehend analog zu demjenigen von Satz VII.5. Wegen der geänderten Bezugsgrößen wird er dennoch der Vollständigkeit halber hier in allen Einzelheiten aufgeführt.

Mit der Regularitätskonstanten β nach (V2), der Lipschitzkonstanten $\varkappa$ nach (V3) sowie d, q, ρ aus EV3 sei

$$\overline{\beta} := (1 + d)\,\beta ,$$

$$\underline{\mu} := \min \left\{ 1,\ \rho\, \frac{2\,(q - d)}{\varkappa\, \overline{\beta}^2\, \|F(\overline{x})\|} \right\} \quad \text{und}$$

$$\alpha := 1 - (1 - q)\,\underline{\mu} .$$

Zum Beweis von (B1) ist zu zeigen, daß EV3 für jeden Startwert $x_0 \in M(F,\overline{x})$ wohldefiniert und lösungskonvergent ist. Hierzu werden die folgenden Hilfsaussagen verwendet, deren Gültigkeit zunächst bewiesen wird:

(A) Ist $x_i \in M(F,\overline{x})$, so existiert ein $\Gamma_i \in L(Z,X)$ nach Schritt 1 von EV3 und es ist

(10.9) $$\|\Gamma_i\| \leq \overline{\beta} .$$

(B) Ist $x_i \in M(F,\bar{x})$ und Γ_i nach Schritt 1 von EV3 gewählt, so ist

$x_{i+1} = x_i + \mu_i \Delta x_i$ nach Schritt 2 von EV3 wohldefiniert mit

(10.10) $x_{i+1} \in M(F,\bar{x})$

(10.11) $\mu_i \geq \underline{\mu}$

(10.12) $\|F(x_{i+1})\| \leq (1 - (1 - q)\,\mu_i)\,\|F(x_i)\| \leq \alpha\,\|F(x_i)\| \leq \alpha\,\|F(\bar{x})\|$.

Zu (A):

Wegen $x_i \in M(F,\bar{x})$ existiert $F'^{-1}(x_i)$ nach (V2) mit

(10.13) $\|F'^{-1}(x_i)\| \leq \beta$.

Deshalb ist für jedes $d \geq 0$:

$\{\, \Gamma \in L(Z,X) \mid \|I - F'(x_i)\,\Gamma\| \leq d \,\} \neq \emptyset$

und es kann Γ_i nach Schritt 1 gewählt werden.

Hierfür gilt dann nach (10.13) :

$$\begin{aligned}\|\Gamma_i\| - \beta &\leq \|\Gamma_i\| - \|F'^{-1}(x_i)\| \\ &\leq \|F'^{-1}(x_i) - \Gamma_i\| \\ &= \|F'^{-1}(x_i)\,(I - F'(x_i)\,\Gamma_i)\| \\ &\leq \|F'^{-1}(x_i)\|\,\|I - F'(x_i)\,\Gamma_i\| \\ &\leq \beta\, d\,,\end{aligned}$$

so daß

$\|\Gamma_i\| \leq (1 + d)\,\beta = \bar{\beta}$.

Zu (B):

Es sei $x_i \in M(F,\bar{x})$ und Γ_i nach Schritt 1 von EV3 gewählt mit (9.5).

Nach (V2) existiert zu $M(F,\bar{x})$ eine offene Umgebung U_1, auf der F stetig Fréchet-differenzierbar ist.

Außerdem existiert nach (V3) zu $M(F,\bar{x})$ eine offene Umgebung $U_2 \subset D$, in der mit K3 und κ aus Definition X.3 die Eigenschaften (10.4) bis (10.6) erfüllt sind.

$U := U_1 \cap U_2$ ist dann eine offene Umgebung von $M(F,\bar{x})$ mit den Eigen-

schaften

(10.14) $U \subset D$

(10.15) F ist auf U stetig Fréchet-differenzierbar

(10.16) Mit K3 und $\varkappa$ aus Definition X.3 gilt (10.4), (10.5) und (10.6) für alle $x \in M(F,\overline{x})$, $y \in X$ und $\mu \in [0,1]$.

Zu $x_i \in M(F,\overline{x})$ existiert wegen (A) auch $\Delta x_i = - \Gamma_i F(x_i)$ und man kann setzen:

(10.17) $\forall\ \mu \in [0,1] : \quad x_i(\mu) := x_i + \mu\, \Delta x_i$.

Wegen der Offenheit von U existiert zu $x_i \in M(F,\overline{x}) \subset U$ sicher ein $\varepsilon_o > 0$, so daß

(10.18) $\forall\ \mu \in [0,\varepsilon_o] : \quad x_i(\mu) \in U$

gilt, woraus sich mit (10.14) insbesondere

(10.19) $\forall\ \mu \in [0,\varepsilon_o] : \quad x_i(\mu) \in D$

ergibt.

Wegen (10.18) folgt mit (10.16) und (10.4)

(10.20) Die Funktion $K3(x_i,\Delta x_i,.)$ ist auf $[0,\varepsilon_o]$ stetig.

Also existiert

(10.21) $\varkappa_1 := \quad \max \{ K3(x_i,\Delta x_i,\mu) \mid \mu \in [0,\varepsilon_o] \}$

Ferner existiert eine Konstante $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_o]$ mit

(10.22) $\varepsilon_1\, \varkappa_1\, \|\Gamma_i\|\, \|\Delta x_i\| \leq 2\,(q - d)$.

Definiert man nun zu $x_i \in M(F,\overline{x})$ und $y_i := \Delta x_i$ die Funktion $K(x_i,y_i,.) : [0,1] \to \mathbb{R}_+^o$ mit der nach (V3) gemäß Definition X.3 existierenden Funktion K3 vermöge :

(10.23) $\forall\ \mu \in [0,1] : \quad K(x_i,y_i,\mu) := K3(x_i,y_i,\mu)$

und $T : D \to Z$ vermöge :

(10.24) $\forall\ x \in D : \quad T(x) := F(x)$,

so gilt in Hilfssatz VII.3 für $\overline{\mu}_i := \varepsilon_1$

(V1) wegen (10.19)

(V2) wegen (10.15) und (10.18)

(V3) wegen (10.20), (10.16), (10.18) und (10.4)

(V4) wegen (10.3) nach (V2) von Satz X.6, weil $x_i \in M(F,\overline{x})$

(V5) wegen der Wahl von Γ_i mit (9.5) .

Folglich erhält man (B1) aus Hilfssatz VII.3 .

Nach (10.21) und (10.22) gilt

(10.25) $\forall\ \mu \in [0,\varepsilon_1] : \quad \mu\ K(x_i,y_i,\mu)\ \|\Gamma_i\|\ \|\Gamma_i\ T(x_i)\| \leq 2\ (q - d)$.

Deshalb ergibt sich in (B1) von Hilfssatz VII.3 $\tilde{\mu}_i = \varepsilon_1$, so daß

(10.26) $\forall\ \mu \in [0,\varepsilon_1] : \quad x_i(\mu) \in M(F,\overline{x})$ mit

$\|F(x_i(\mu))\| \leq (1 - (1 - q)\ \mu)\ \|F(x_i)\|$.

Gemäß Definition (10.23), (10.24) und (9.6) ist

(10.27) $\forall\ \mu \in [0,1] : \quad \mu\ K(x_i,y_i,\mu)\ \|\Gamma_i\|\ \|\Gamma_i\ T(x_i)\| = \eta_i(\mu)$.

Sei nun

$N_1 := \{\ \overline{\mu} \in [0,1] \mid \forall\ \mu \in [0,\overline{\mu}] : x_i(\mu) \in M(F,\overline{x})\ \}$,

$N_2 := \{\ \overline{\mu} \in [0,1] \mid \forall\ \mu \in [0,\overline{\mu}] : \eta_i(\mu) \leq 2\ (q - d)\}$ und

$s_1 := \sup N_1$ sowie $s_2 := \sup N_2$.

Dann gilt $s_1 \geq \varepsilon_1$ nach (10.26) und $s_2 \geq \varepsilon_1$ nach (10.25) und (10.27).

Außerdem läßt sich zeigen, daß

(10.28) $s_2 \leq s_1$.

Angenommen, es sei

(10.29) $s_1 < s_2$.

Dann gilt $[0,s_1] \subset [0,s_2)$ und damit definitionsgemäß

(10.30) $\forall\ \mu \in [0,s_1] : \quad \eta_i(\mu) \leq 2\ (q - d)$.

Wegen der Abgeschlossenheit von $M(F,\overline{x})$ nach (V1) ist außerdem

$s_1 = \max N_1$, so daß

(10.31) $\forall\ \mu \in [0,s_1] : \quad x_i(\mu) \in M(F,\overline{x})$.

Mit K nach (10.23) und T nach (10.24) sind dann für $\overline{\mu}_i = s_1$ wiederum die Voraussetzungen von Hilfssatz VII.3 erfüllt, und zwar

(V1) wegen (10.31) und $M(F,\overline{x}) \subset D$

(V2) wegen (10.31) und (V2) von Satz X.6

(V3) wegen (10.31), (10.16) und (10.4)

(V4) wegen (10.3) nach (V2) von Satz X.6
(V5) wegen der Wahl von Γ_i mit (9.5) .

In (B1) von Hilfssatz VII.3 ergibt sich dann $\tilde{\mu}_i = \varepsilon_1$ wegen (10.30), so daß aus (7.7) speziell

$$\|F(x_i(\varepsilon_1))\| \leq (1 - (1 - q)\,\varepsilon_1)\,\|F(x_i)\| \leq (1 - (1 - q)\,\varepsilon_1)\,\|F(\bar{x})\|$$

folgt.
Weil $1 \geq \varepsilon_2 > \varepsilon_1 \geq \varepsilon_1 > 0$ gilt und $\|F(x_i(.))\|$ in ε_1 stetig ist, existiert dann aber ein $\varepsilon_3 > 0$, so daß

$$\forall\, \delta \in [0,\varepsilon_3] : \quad \|F(x_i(\varepsilon_1+\delta))\| \leq \|F(\bar{x})\| \qquad \text{und damit}$$

$$\forall\, \delta \in [0,\varepsilon_3] : \quad x_i(\varepsilon_1+\delta) \in M(F,\bar{x}) .$$

Dies steht aber im Widerspruch zur Definition von ε_1, so daß die Annahme (10.29) falsch ist. Somit gilt (10.28), woraus sich

$$(10.32) \qquad N_2 \subset N_1$$

ergibt.
Mit (10.4) ist demzufolge η_i bezüglich μ zumindest solange stetig, bis entweder $\mu = 1$ oder $\eta_i(\mu) = 2\,(q - d)$ erreicht ist.

Deshalb existiert stets ein μ_i mit (9.7) und (9.8), so daß x_{i+1} in Schritt 2 von EV3 wohldefiniert ist.

Wegen (9.7) ist dann

$$(10.33) \qquad \mu_i \in N_2$$

und mit (10.32) folglich auch

$$(10.34) \qquad \mu_i \in N_1 ,$$

so daß (10.10) gilt.

Aus $\mu_i \in N_1$ folgt mit (V3) und (10.6), daß

$$K3(x_i,\Delta x_i,\mu_i) \leq \varkappa .$$

Falls $\mu_i < 1$, erhält man daraus zusammen mit (9.8) und (10.9)

$$\varrho\, 2\,(q - d) \leq \eta_i(\mu_i) \leq \mu_i\, K3(x_i,\Delta x_i,\mu_i)\, \|\Gamma_i\|^2\, \|F(x_i)\| \leq \mu_i\, \varkappa\, \bar{\beta}^2\, \|F(\bar{x})\|,$$

so daß (10.11) bewiesen ist.

Wegen (10.34) sind die Voraussetzungen von Hilfssatz VII.3 bei Wahl von K und T nach (10.23) bzw. (10.24) auch für $\bar{\mu}_i = \mu_i$ erfüllt, wobei sich wegen (10.33) in (B1) $\tilde{\mu}_i = \mu_i$ ergibt.

Aus (7.7) folgt damit speziell

$$\|F(x_{i+1})\| \leq (1 - (1 - q)\,\mu_i)\,\|F(x_i)\| .$$

Zusammen mit (10.11) ergibt sich daraus (10.12).

Mit (A) und (B) läßt sich nun der Beweis von (B1) durchführen.

Für beliebiges $x_o \in M(\cdot,\bar{x})$ folgt nämlich mit (A) und (B) induktiv, daß x_i nach Schritt 2 von EV3 für alle $i \in \mathbb{N}$ wohldefiniert ist und den Eigenschaften (10.10), (10.11) und (10.12) genügt, denn zu $x_i \in M(F,\bar{x})$ sichert (A) jeweils die Existenz eines geeigneten Γ_i und mit diesem ist nach (B) dann x_{i+1} wohldefiniert und nach (10.10) liegt auch x_{i+1} wieder in $M(F,\bar{x})$.

Also ist EV3 für jedes $x_o \in M(F,\bar{x})$ wohldefiniert, und es bleibt zu zeigen, daß EV3 lösungskonvergent ist.

Nach (10.12) gilt

$$\forall\, i \in \mathbb{N}: \quad \|F(x_{i+1})\| \leq \alpha\,\|F(x_i)\| ,$$

woraus sich rekursiv

$$(10.35) \quad \forall\, i \in \mathbb{N}: \quad \|F(x_i)\| \leq \alpha^i\,\|F(x_o)\| \leq \alpha^i\,\|F(\bar{x})\|$$

ergibt.

Damit erhält man für beliebiges $i, j \in \mathbb{N}$:

$$\|x_{i+j} - x_i\| \leq \sum_{k=0}^{j-1} \|x_{i+k+1} - x_{i+k}\| = \sum_{k=0}^{j-1} \|\mu_{i+k}\,\Delta x_{i+k}\|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{j-1} \|\Delta x_{i+k}\| = \sum_{k=0}^{j-1} \|\Gamma_{i+k}\,F(x_{i+k})\|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\Gamma_{i+k}\|\,\|F(x_{i+k})\| .$$

Mit (10.9) und (10.35) folgt damit weiter

$$\|x_{i+j} - x_i\| \leq \bar{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \|F(x_{i+k})\| \leq \bar{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{i+k}\,\|F(\bar{x})\| \leq \bar{\beta}\,\|F(\bar{x})\|\,\frac{\alpha^i}{1-\alpha} .$$

Da $\alpha < 1$ nach Definition, existiert somit zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ stets ein $i_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall\, i \geq i_1(\varepsilon),\ j \in \mathbb{N}: \quad \|x_{i+j} - x_i\| \leq \varepsilon .$$

Somit bildet $\{\, x_i \mid i \in \mathbb{N}_o \,\}$ eine Cauchy-Folge in $M(F,\bar{x})$, die in dem Banachrausm X gegen ein Element x* konvergiert, das wegen (V1) in

$M(F,\bar{x})$ liegt.

Wegen der Stetigkeit von F gilt mit (10.35)

$$\|F(x^*)\| = \lim_{i\to\infty} \|F(x_i)\| \le \lim_{i\to\infty} \alpha^i \|F(\bar{x})\| = 0 ,$$

so daß EV3 lösungskonvergent ist. ▲

X.7 Bemerkungen

X.7.1

Da EV3 ein Spezialfall von EV1 ist, gilt Bemerkung VII.6.2 sinngemäß auch für EV3. Das bedeutet:

Sind die Voraussetzungen von Satz X.6 erfüllt, so gilt wegen der Beschränktheit von $\|\Gamma_i\|$ durch $\bar{\beta}$ und von $K3(x_i,\Delta x_i,\mu_i)$ durch κ sowie der nach (10.12) für jeden Iterationsschritt garantierten Mindestnormreduktion für F um den Faktor α, daß ein $i_o \in \mathbb{N}$ existiert mit

(10.36) $\quad \forall\, i \ge i_o : \quad \eta_i(\mu) \le \kappa\, \bar{\beta}^2\, \alpha^i\, \|F(\bar{x})\| < \rho\, 2\, (q - d)$.

Folglich kann (9.8) in Schritt 2 von EV3 für $i \ge i_o$ nicht erfüllt sein und es muß somit $\mu_i = 1$ gelten, wenn $i \ge i_o$ ist.

EV3 geht also für $i \ge i_o$ in ein ungedämpftes Newton-ähnliches Verfahren für F der Form

(10.37) $\quad \forall\, i \ge i_o : \quad x_{i+1} := x_i - \Gamma_i\, F(x_i) \quad$ mit $\|I - F'(x_i)\,\Gamma_i\| \le d$

über.

Für den Fall $d = 0$ ist (10.37) mit dem Newton-Verfahren identisch. Unter den Voraussetzungen von Satz X.6 konvergiert dieses in $M(F,\bar{x})$ gegen eine Nullstelle x^* von F. Wegen $F(x^*) = 0$ und der nach (V2) geltenden Stetigkeit von $\|F(.)\|$ in x^* existiert damit zu $0 < \|F(\bar{x})\|$ ein $r_o > 0$, so daß

$\forall\, x \in S(x^*,r_o) : \quad \|F(x)\| \le \|F(\bar{x})\| \quad$ und deshalb

(10.38) $\quad S(x^*,r_o) \subset M(F,\bar{x})$.

Zudem existiert wegen der Konvergenz der Folge $\{\, x_i \mid i \in \mathbb{N} \,\}$ gegen x^* und (10.35) zu $r_1 < \frac{r_o}{2}$ ein $i_1 \in \mathbb{N}$ mit

(10.39) $\quad \forall\, i \ge i_1 : \quad x_i \in S(x^*,r_1) \quad$ und $\quad \|F(x_i)\| \le \min\left\{ \frac{r_1}{2\,\beta} , \frac{1}{2\,\beta^2\,\kappa} \right\}$.

Falls nun $i \ge i_1$ und $F(x_i) \neq 0$, so gelten für x_i mit $r = r_1$ und den

Konstanten β, $K := \varkappa$ und $\zeta := \beta \, \|F(x_i)\|$ die Voraussetzungen von Satz IV.20.
Mit (10.38) existiert nämlich nach (V2) von Satz X.6 jeweils die kovariante Inverse $F'^{-1}(x_i)$ von $F'(x_i)$ und es gilt

(V0) wegen $S(x_i,r_1) \subset S(x^*,r_o)$ und (10.38)

(V2) wegen (V2) von Satz X.6 , da $x_i \in M(F,\bar{x})$

(V1) wegen $\|F'^{-1}(x_i) \, F(x_i)\| \leq \beta \, \|F(x_i)\| = \zeta$ nach (V2)

(V3) unter Verwendung von (10.4) und (10.6) wegen (V3) von Satz X.6 sowie wegen $S(x_i,r_1) \subset S(x^*,r_o)$ und (10.38)

(V4) da $\zeta \, \beta \, h = \beta^2 \varkappa \, \|F(x_i)\| \leq \frac{1}{2}$ nach (10.39)

(V5) weil nach (10.39) für $h \in (0,\frac{1}{2}]$:

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \, \zeta \leq 2\zeta = 2 \beta \, \|F(x_i)\| \leq r_1 \, .$$

Man erhält also die Aussage:

Wird in EV3 d = 0 gewählt und sind die Voraussetzungen von Satz X.6 erfüllt, so ist EV3 nach endlich vielen Schritten identisch mit dem Newton-Verfahren für F. Falls nicht bereits nach endlich vielen Schritten $F(x_i) = 0$ gilt, so sind dabei dann nach ebenfalls endlich vielen Schritten für alle folgenden Iterierten die Voraussetzungen von Satz IV.20 erfüllt und es können hierfür die dort angegebenen Fehlerabschätzungen (B4) und (B5) angewendet werden.

X.7.2

Ein zu EV3 mit d = 0 vergleichbares gedämpftes Newton-Verfahren wird von DEUFLHARD in [15] angegeben. Dieses Verfahren wird in [14] geringfügig modifiziert und die in [15] angeführten Konvergenzaussagen (Theorem 3.2 und 3.3) finden sowohl in [14] wie auch in [12] grundlegende Verwendung. Weil das Verfahren von DEUFLHARD mit den zugehörigen Konvergenzaussagen durch EV3 und Satz X.6 in einigen Punkten wesentlich verbessert wird, soll ein Vergleich von Satz X.6 mit den durch Theorem 3.2 und 3.3 in [15] gemachten Aussagen sowie deren in [14] bzw. [12] erfolgten Korrekturen angestellt werden.

Zunächst ist zu bemerken, daß sich alle von DEUFLHARD gemachten Aussagen auf den $\mathbb{R}^n$ beziehen, während EV3 nach Satz X.6 in beliebigen Banachräumen angewendet werden kann.

Gemeinsam ist beiden Verfahren die Grundidee, den Dämpfungsparameter so zu steuern, daß mit jedem Schritt in der verwendeten Norm für die Funktion F eine Normreduktion erreicht wird. Deshalb ist es folgerichtig, daß die Voraussetzungen bei DEUFLHARD ebenso wie in dieser Arbeit auf Niveaumengen gefordert werden.

Im Gegensatz zu Voraussetzung (V1) von Satz X.6, in der die Abgeschlossenheit der Niveaumenge $M(F,\overline{x})$ verlangt wird, fordert DEUFLHARD in [15] unter Punkt IV. seiner Standard - Voraussetzungen (3.6) ebenso wie in den später erschienenen Artikeln die Kompaktheit der (entsprechenden) Niveaumenge $G_o(A)$. Diese Kompaktheitsforderung hat beweistechnische Ursachen und rührt vermutlich daher, daß das Verfahren von DEUFLHARD aus einem ähnlichen Verfahren von STOER (vergl. (5.4.2.4) in [51]) abgeleitet wurde und die von STOER gemachten Konvergenzaussagen (siehe [51], Satz 5.4.2.5) ebenfalls die Kompaktheit der entsprechenden Niveaumenge zur Voraussetzung haben. Die Reduktion der Forderung von der Kompaktheit zur Abgeschlossenheit von $M(F,\overline{x})$ macht sich besonders in unendlich-dimensionalen Räumen entscheidend bemerkbar, wenn die Kompaktheit nicht mehr mit der Beschränktheit und Abgeschlossenheit äquivalent ist und die abgeschlossene Einheitskugel nicht kompakt ist. Dann ist nämlich die Kompaktheit einer Niveaumenge in der Regel nie erfüllt, weil für $F(\overline{x}) \neq 0$ wegen der Stetigkeit von F zu $x_1 \in M(F,\overline{x})$ mit $\|F(x_1)\| < \|F(\overline{x})\|$ auch eine abgeschlossene Kugelumgebung $\overline{S}(x_1,r_1)$ von x_1 in $M(F,\overline{x})$ liegt und diese nicht kompakt ist. Insbesondere in Funktionenräumen wäre somit durch eine Kompaktheitsforderung für $M(F,\overline{x})$ in Satz X.6 die Anwendbarkeit des Satzes gänzlich eingeschränkt. Selbst im $\mathbb{R}^n$ bedeutet (V1) von Satz X.6 gegenüber (3.6) IV. aus [15] den Verzicht auf die Forderung der Beschränktheit der Niveaumenge und ermöglicht somit eine breitere Anwendung.

Bei der praktischen Durchführung der Verfahren macht sich bei dem DEUFLHARD - Verfahren weiterhin gegenüber EV2 sehr nachteilig bemerkbar, daß die angegebenen Abschätzungen für die Normreduktion in mehrfacher Hinsicht nicht optimal sind. Es werden nämlich die folgenden Normreduktionsfaktoren angegeben:

(10.40) a) $\sqrt{t_k(\lambda,A)} = 1 - \lambda + \lambda^2 h_k (1 + h_k)\, \mathrm{cond}(AJ_k)$

nach Theorem 3.2 aus [15] ,

b) $\sqrt{t_k(\lambda,A)} = 1 - \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 h_k (1 + \lambda h_k)\, \mathrm{cond}(AJ_k)$

nach Theorem 1.1 aus [14] , bzw.

c) $\Theta_k(\lambda) = 1 - \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 h_k (1 + \lambda h_k)$

gemäß Theorem 2.1 aus [12] (was nach Wahl von $A = J_k^{-1}$ wegen $\mathrm{cond}(AJ_k) = \mathrm{cond}(I) = 1$ mit b) identisch ist) .

Die in (10.40) verwendete Größe h_k, die in [13] durch (3.7) mit

$h_k := \beta^2 \gamma \|F(x_k)\|$

definiert ist, stellt in jedem Falle eine Abschätzung für das in (9.6) von EV3 vorkommende Produkt $K3(x_i,\Delta x_i,\mu) \|\Gamma_i\| \|\Delta x_i\|$ dar. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß K3 nach (10.6) durch die Konstante $\varkappa$ abschätzbar ist, die der Größe γ bei DEUFLHARD entspricht und daß

$\|\Gamma_i\| \|\Delta x_i\| \le \|F'^{-1}(x_i)\|^2 \|F(x_i)\| \le \beta^2 \|F(x_i)\|$ für $x_i \in M(F,\bar{x})$.

Die in (9.6), (9.7) und (9.8) verwendeten Größen von EV3 sind also bei DEUFLHARD durch in der Regel erheblich größere globale Konstanten abgeschätzt, die noch dazu im allgemeinen für die Anwendung nicht greifbar sind.

Aber selbst wenn man diese ungünstige Abschätzung von DEUFLHARD in (9.6) verwendet und zu h_k mit geeignetem q den Dämpfungsparameter μ_i nach (9.7) so bestimmt, daß

(10.41) $\mu_i h_k = 2q$,

so liefert Satz X.6 immer noch eine bessere obere Schranke für die Normreduktion als (10.40). Mit (10.12) ergibt sich dann nämlich

(10.42) $\|F(x_{i+1})\| \le (1 - (1-q)\mu_i) \|F(x_i)\| = (1 - \mu_i + \mu_i^2 \frac{h_k}{2}) \|F(x_i)\|$.

Identifiziert man μ_i mit dem entsprechenden Dämpfungsparameter λ von DEUFLHARD, so stellt man fest, daß der jeweilige dritte Summand aus (10.40) in (10.42) durch $\frac{1}{2}\mu_i^2 h_k$ ersetzt worden ist. Die entsprechenden Terme bei DEUFLHARD sind also mindestens um den Faktor $(1 + \lambda h_k)\,\mathrm{cond}(AJ_k)$ größer. Die Gründe hierfür liegen in der andersartigen Beweisführung bei DEUFLHARD.

Verbunden mit der Angabe eines schlechteren Normreduktionsfaktors ist bei DEUFLHARD eine Verkleinerung des Intervalls für die Wahl des Dämpfungsparameters λ. Dieser darf nur aus $[0,\mu_k(A)]$ gewählt werden mit

(10.43) a) $\mu_k(A) := \min\left\{1, \frac{1}{h_k (1 + h_k)\,\mathrm{cond}(AJ_k)}\right\}$

nach Theorem 3.2 aus [15] ,

b) $\mu_k(A) := \min \{ 1, (\sqrt{1 + \frac{8}{\mathrm{cond}(AJ_k)}} - 1) / 2 h_k \}$

nach Theorem 1.1 aus [14]

c) $\mu_k(J_k^{-1}) := \min \{ 1, \frac{1}{h_k} \}$

nach Theorem 2.1 aus [12], was sich wegen $\mathrm{cond}(J_k^{-1} J_k) = 1$ aus b) ergibt.

Nach (9.7) bzw. (10.41) wäre es aber möglich, $\mu_k(A)$ durch

$$\tilde{\mu}_k(A) := \min \{ 1, \frac{2q}{h_k} \}$$

zu ersetzen, was aber immer noch erheblich schlechter ist, als die nach (9.7) und (9.8) erfolgte Wahl des Dämpfungsparameters mit Hilfe lokaler Konstanten.

Zusammenfassend kann man somit die Vorteile von EV3 mit Satz X.6 gegenüber dem DEUFLHARD - Verfahren und den zugehörigen Aussagen aus [15], [14] bzw. [12] folgendermaßen charakterisieren:

(10.44) Mit Satz X.6 kann EV3 in beliebigen Banachräumen angewendet werden.

(10.45) EV3 verwendet nur lokale Konstanten zur Verfahrenssteuerung.

(10.46) Wegen (10.45) sind mit Satz X.6 für EV3 bessere Normreduktionsabschätzungen möglich.

(10.47) Wegen (10.46) ergeben sich größere Dämpfungsparameter, wodurch der Gesamtaufwand von EV3 gegenüber dem Verfahren nach DEUFLHARD erheblich reduziert werden kann.

Wie gravierend der Unterschied im numerischen Aufwand bei beiden Verfahren sein kann, ergibt sich schon anhand eines einfachen Beispiels:

Betrachtet sei die Gleichung

(10.48) $\mathrm{atan}(x) = 0$

mit der eindeutigen Lösung $x^* = 0$.

Bekanntlich divergiert das Newton-Verfahren zur Lösung von (10.48) ausgehend von x_0, wenn

$$\mathrm{atan}(|x_0|) \geq \frac{2|x_0|}{1 + x_0^2} \quad ,$$

während gedämpfte Newton-Verfahren für $x_o \in \mathbb{R}$ zur Lösung führen können (vergl. z.B. STOER [51], Kap. 5.4).

Wählt man nun $x_o := 3$ und wendet EV3 zur Lösung von (10.48) an, so liefert das Verfahren die Lösung in 12 Iterationsschritten bis auf 22 Stellen genau. Demgegenüber benötigt das Verfahren nach DEUFLHARD weit über 2 000 Iterationsschritte bis zur Lösung, obwohl der Term $\text{cond}(AJ_k)$ aus (10.40) im Eindimensionalen stets gleich eins ist und sich somit hier noch nicht aufwandsteigernd auswirkt. Der Grund für die hohe Iterationszahl liegt im wesentlichen darin, daß die Norm der Inversen der Ableitung stets über die ganze Niveaumenge abgeschätzt werden muß, so daß die hohe Norm von $F'^{-1}(x_o)$ für sämtliche Iterationsschritte relevant ist.

Der Grund für die Tatsache, daß das Verfahren von DEUFLHARD trotz seiner weitgehenden numerischen Nachteile angegeben wurde, ist vermutlich darin zu sehen, daß das Verfahren in dieser Form garnicht angewendet wurde. Bei den von DEUFLHARD betrachteten Problemen und deren Lösung durch das Schießverfahren führen Approximationen und Diskretisierungen dazu, daß im Verlauf des Verfahrens die gemäß Theorem 3.2 und 3.3 aus [15] erforderlichen Steuerungsgrößen nicht mehr exakt bestimmbar sind. Somit werden die Größen dieser Sätze nur heuristisch zur Steuerung des Dämpfungsparameters herangezogen, was zu einer Überschätzung des Parameters führen kann. Die Konvergenz des Verfahrens von DEUFLHARD kann daher nicht theoretisch durch den Satz abgesichert werden, sondern sie wird durch Monotonietests und eventuelle Wiederholung von Schritten mit fortgesetzt verkleinerten Schrittweiten (numerisch) gesichert.
In dieser Hinsicht ist es lediglich wichtig, daß die zur Verfahrenssteuerung verwendeten heuristischen Größen in der Tendenz alle relevanten Einflußfaktoren berücksichtigen. Sind die Größen durch einen konstanten Faktor verändert, so führt das allenfalls zur Notwendigkeit, zusätzliche Reduktionsschritte für den Dämpfungsfaktor durchzuführen. Somit können auch die von DEUFLHARD angegebenen Aussagen im Zusammenhang mit den daraus abgeleiteten Schrittweitensteuerungen für das Schießverfahren nützlich sein, obwohl deren unmittelbare theoretische Anwendung in Bezug auf eine a-priori gegebene Konvergenzsicherung problematisch ist. Sicherlich ist aber zu erwarten, daß eine Übertragung der zu EV3 gehörenden Schittweitensteuerung auf die von DEUFLHARD angegebene Vorgehensweise zu vermindertem Aufwand führt.

X.7.3

Für D offen $\subset \mathbb{R}^n$ und Funktionen $F : D \to \mathbb{R}^n$ wird in [50] von SCHWETLICK unter der Bezeichnung "Algorithmus 5.1" ebenfalls ein gedämpftes Newton-ähnliches Verfahren angegeben, bei dem ähnlich wie in EV3 mit jedem Iterationsschritt eine Normreduktion angestrebt wird. Als Approximation A_k für $F'^{-1}(x_k)$ wird dabei jeweils eine konsistente Mehrschrittapproximation verwendet. Die Güte der jeweiligen Approximation wird im Verfahren adaptiv so gesteuert, daß hinreichende Genauigkeit gewährleistet ist.

Naturgemäß sind auch die Ausführbarkeitsvoraussetzungen für dieses Verfahren an eine entsprechende Niveaumenge geknüpft. Da bei Verwendung einer konsistenten m - Schritt Approximation für $F'^{-1}(x_k)$ für den ersten Iterationsschritt m Startwerte x_i $(0 \leq i \leq m-1)$ erforderlich sind, kommt dabei sinnvollerweise

$$W_o := \{ x \in D \mid \|F(x)\| \leq \max \{ \|F(x_i)\| \mid i \in \mathbb{N}_o,\ 0 \leq i \leq m-1 \} \}$$

als Niveaumenge in Betracht. Bei Verwendung einer 1 - Schritt Approximation ist diese mit $M(F,x_o)$ identisch, während ansonsten $M(F,x_o)$ stets in W_o enthalten ist.

Im Ausführbarkeitssatz 5.2 wird von SCHWETLICK in [50] - ähnlich wie bei DEUFLHARD in [15] - die Kompaktheit der Niveaumenge W_o gefordert, so daß sich diesbezüglich im Vergleich zu Satz X.6 die gleichen Nachteile wie bei dem Verfahren von DEUFLHARD ergeben. Neben der Kompaktheit von W_o wird von SCHWETLICK für die Anwendung des Konvergenzsatzes auf W_o ferner die zweimalige stetige Differenzierbarkeit von F sowie die gleichmäßige Nichtsingularität von F' mit

$$\forall\, x \in W_o : \quad \|F'^{-1}(x)\| \leq M \quad \text{für ein } M > 0$$

vorausgesetzt.

Folglich sind die Voraussetzungen von Satz X.6 für EV3 stets erfüllt, wenn Satz 5.2 von SCHWETLICK für dessen Algorithmus 5.2 anwendbar ist. EV3 ist deshalb diesem Algorithmus gegenüber einerseits für allgemeinere Räume definiert und andererseits unter schwächeren Voraussetzungen ausführbar.

X.7.4

Wie bereits erwähnt stellt EV3 eine Spezialisierung von EV1 dar, in der insbesondere die Schrittweitensteuerung bezüglich des Einbettungsparameters λ entfällt. Als gedämpftes Newton-ähnliches Verfahren für die Ausgangsgleichung $F(x) = 0$ steht EV3 daher dem ursprünglich zu lösenden Problem erheblich näher als ein allgemeines Einbettungsverfahren (wie z.B. EV1 oder EV2) mit einer mehr oder minder willkürlich gewählten Einbettung H. Als Folge davon ist der numerische Aufwand zur Bestimmung der Lösung x^* bei der Durchführung von EV3 im allgemeinen wesentlich geringer als bei einem allgemeineren Einbettungsverfahren. Deshalb ist die Anwendung allgemeiner Einbettungsverfahren sinnvollerweise nur dann gerechtfertigt, wenn lokal stärker gebundene Verfahren wie z.B. das Newton-Verfahren oder EV3 bei der Problemlösung versagen. Folglich sollten die theoretischen Voraussetzungen für die Ausführbarkeit von Einbettungsverfahren so gestaltet sein, daß ein allgemeineres Verfahren mit höherem numerischen Aufwand unter schwächeren Voraussetzungen ausführbar ist als ein spezielleres mit geringerem Aufwand. Andernfalls wäre der höhere Aufwand nicht zu rechtfertigen.

Betrachtet man nun Konvergenz- und Ausführbarkeitsaussagen aus der Literatur, so stellt man fest, daß diese Korrelation zwischen numerischem Aufwand und der Stärke bzw. Schwäche der Ausführbarkeitsvoraussetzungen nicht bei allen vorgeschlagenen Verfahren gewahrt ist. So gibt es Konvergenzaussagen für allgemeine Einbettungsverfahren, die so starke Voraussetzungen erfordern, daß hierdurch gleichzeitig die Ausführbarkeit eines spezielleren Verfahrens impliziert ist. Unter solchen Gegebenheiten erübrigt sich natürlich die Anwendung des allgemeinen Verfahrens, und man wird das spezielle Verfahren mit geringerem Aufwand zur Problemlösung heranziehen.

Ein Beispiel für einen Ausführbarkeitssatz mit stärkeren Voraussetzungen als sie für Satz X.6 erforderlich sind, stellt der bereits früher erwähnte Satz 2.2.1 von FEILMEIER - LORY - SCHEURING - WACKER aus [19] dar. Hier wird gefordert, daß die Einbettung T auf ganz $I \times E$ ($I = [0,1]$, E = Banachraum) zweimal stetig Fréchet-differenzierbar ist mit einer durch D beschränkten zweiten Ableitung und einer auf ganz $I \times E$ durch N beschränkten Inversen der ersten Ableitung bezüglich x. Wegen der Stetigkeit der Einbettung ergibt sich damit zunächst für

jedes $\bar{x} \in E$ die Abgeschlossenheit von

$$\{1\} \times M(F,\bar{x}) = \{(1,x) \in I \times E \mid \|T(1,x)\| = \|F(x)\| \leq \|F(\bar{x})\|\}$$

und daraus auch die von $M(F,\bar{x})$. Mit der Konstanten D ist für F' dann außerdem die Lipschitzbedingung $L_3(M(F,\bar{x}))$ erfüllt, weil

$\forall\, x, y \in E, \tau \in [0,1]$:

$$\|F'(x + \tau y) - F'(x)\| \leq \sup_{t \in [0,1]} \|F''(x + t\tau y)\| \, \|\tau y\| \leq D \, \|\tau y\| .$$

Da die Inverse der ersten Ableitung T_x auf $I \times E$ und damit auch auf jeder Umgebung von $\{1\} \times M(F,\bar{x})$ durch N beschränkt ist, erhält man außerdem die Regularität von F auf $M(F,\bar{x})$.

Folglich gelten die Voraussetzungen von Satz X.6 und statt der Einbettung T mit zugehörigem Stufenverfahren verwendet man sinnvollerweise besser EV3. Die in Satz 2.2.1 angegebene Voraussetzung (2.2.4) ist dann überflüssig.

Ein ähnlicher Sachverhalt ergibt sich bezüglich Korollar 4.8 bei AVILA in [4], welches ein Resultat von MEYER aus [40] wiedergibt. Hier wird eine stetig differenzierbare Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ betrachtet. Dafür ist die Abgeschlossenheit von $M(F,\bar{x})$ mit jedem $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ stets gewährleistet. Zudem soll F' auf ganz $\mathbb{R}^n$ lipschitzstetig sein (mit Lipschitzkonstante K) und eine durch β beschränkte koniare Inverse besitzen, so daß auch (V2) und (V3) von Satz X.6 für $M(F,\bar{x})$ bei beliebigem $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist.

Im Gegensatz zu EV3 werden bei dem von AVILA in [4] angegebenen Iterationsverfahren der Form

$$(10.49) \qquad x^k := x^{k-1} - \frac{1}{N} F'^{-1}(x^{k-1}) \, F(x_o) \quad \text{für } 1 \leq k \leq N-1$$

$$x^k := x^{k-1} - F'^{-1}(x^{k-1}) \, F(x^k) \quad \text{für } k \geq N$$

$$\text{mit } \frac{1}{N} < \frac{4}{\beta^2 K \, \|F(x_o)\| \, (\exp(\beta^2 K \, \|F(x_o)\|) - 1)}$$

zur Bestimmung des (konstanten) Dämpfungsfaktors $\frac{1}{N}$ nicht lokale, sondern die globalen Konstanten herangezogen. Folglich sind die Dämpfungsfaktoren im allgemeinen erheblich zu klein und es ergeben sich ähnliche Nachteile, wie sie zu dem Verfahren von DEUFLHARD in X.7.2 angegeben wurden. Insbesondere der numerische Aufwand zur

Problemlösung ist trotz stärkerer Voraussetzungen gegenüber EV3 normalerweise unverhältnismäßig höher.

X.7.5

Nach (10.12) gilt unter den Voraussetzungen von Satz X.6 stets

$$\forall\, i \in \mathbb{N}_o : \quad \|F(x_{i+1})\| \le \alpha\, \|F(x_i)\|$$

$$\text{mit } \alpha = 1 - (1 - q)\,\underline{\mu}$$

$$\text{und } \underline{\mu} = \min\left\{ 1,\ \rho\, \frac{2\,(q - d)}{\overline{\beta}^2\, \kappa\, \|F(\overline{x})\|} \right\} \le 1 .$$

Es gilt deshalb rekursiv

$$\forall\, i \in \mathbb{N}_o : \quad \|F(x_i)\| \le \alpha^i\, \|F(x_o)\| .$$

Hieraus folgt

$$\forall\, k \in \mathbb{N} : \quad \|x_k - x_o\| \le \sum_{i=0}^{k} \|\mu_i\, \Delta x_i\| \le \sum_{i=0}^{k} \|\Delta x_i\| \le \sum_{i=0}^{k} \|\Gamma_i\|\, \|F(x_i)\|$$

$$\le \sum_{i=0}^{k} \overline{\beta}\, \alpha^i\, \|F(x_o)\| = \frac{1 - \alpha^{k+1}}{1 - \alpha}\, \overline{\beta}\, \|F(x_o)\|$$

$$\le \frac{1}{1 - \alpha}\, \overline{\beta}\, \|F(x_o)\| .$$

Also liegen alle Iterierten x_k, alle Verbindungsstrecken zwischen x_{k+1} und x_k und die Nullstelle x* von F in einer abgeschlossenen Kugel um x_o mit dem Radius

$$(10.50) \qquad r \ge \frac{\overline{\beta}\, \|F(x_o)\|}{1 - \alpha} = \frac{\overline{\beta}\, \|F(x_o)\|}{(1 - q)\,\underline{\mu}} .$$

Es ist deshalb für die Ausführbarkeit von EV3 ausreichend, wenn die Voraussetzungen von Satz X.6 nicht bezüglich $M(F,\overline{x})$, sondern bezüglich

$$M_o := M(F,\overline{x}) \cap \overline{S}(x_o, r) \quad \text{mit r nach (10.50)}$$

erfüllt sind. Man hat somit theoretisch die Möglichkeit, die im allgemeinen kaum bekannte Menge $M(F,\overline{x})$ durch eine Kugel um den Startwert x_o mit festem, allerdings von den Schranken $\overline{\beta}$ und κ und den Konstanten ρ, q, d und $\|F(\overline{x})\|$ abhängigen Radius zu ersetzen. Da andererseits die Schranken $\overline{\beta}$ und κ wiederum von r abhängig sind, ist die Bestimmung eines geeigneten Radius zur Verifikation der Voraussetzungen von Satz X.6 nicht unproblematisch und nur bei gutmütigen Funktionen F möglich.

Die Größe $\underline{\mu}$ in (10.50) ist als untere Schranke für alle Dämpfungsfaktoren (vergl. (10.11)) bei fast allen Problemen erheblich kleiner als eins und führt somit zu relativ großen Radien. Es wäre deshalb vorteilhaft, diese Größe aus der Bestimmungsgleichung für r zu eliminieren. Das ist möglich, wenn EV3 durch EV4 ersetzt wird, d.h. wenn in EV3 d = 0 gesetzt wird und wenn die Dämpfungsfaktoren μ_i nicht wie in EV3 aus [0,1], sondern wie in EV4 vorgesehen jeweils nur aus dem Intervall $[0,m_i]$ mit m_i nach (9.10) gewählt werden können.

Für EV4 ergibt sich deshalb ein Ausführbarkeitssatz mit Voraussetzungen analog zu Satz X.6, jedoch bezogen auf

$$M_o := M(F,x_o) \cap \overline{S}(x_o,r) \qquad \text{mit} \qquad r \geq \frac{\beta \, \|F(x_o)\|}{1-q} \quad .$$

Bevor ein solcher Satz formuliert und bewiesen wird, sollen zur Vorbereitung zunächst einige Hilfsaussagen bezüglich der in EV4 verwendeten Konstanten bereitgestellt werden.

X.8 Hilfssatz

Es sei $n \in \mathbb{N}_o$ beliebig.

Die Größen a_i, b_i, μ_i, α_i und m_i seien für $i \leq n$ gemäß EV4 wohldefiniert.

Dann gilt:

(10.51) $\quad 1 - (1 - q)\, b_n = a_n$

(10.52) $\quad a_n \in (q,1]$

(10.53) $\quad b_n \in [0,1)$

(10.54) $\quad m_n \in (0,1]$

(10.55) $\quad \mu_n = m_n \iff a_n\, \alpha_n = q$

Beweis:

Zu (10.51)

Beweis per Induktion:

Induktionsanfang (n = 0): $\quad 1 - (1 - q)\, b_o = 1 = a_o$.

Schluß von n auf n+1:

Es sei $\quad 1 - (1 - q)\, b_n = a_n$.

Falls dann $\mu_n < m_n$, so folgt mit (9.15), (9.19) und (9.20):

$$1 - (1 - q)\, b_{n+1} = 1 - (1 - q)\, b_n - (1 - q)\, \mu_n\, a_n = a_n - (1 - q)\, \mu_n\, a_n$$

$$= (1 - (1 - q)\, \mu_n)\, a_n = \alpha_n\, a_n = a_{n+1} .$$

Falls andererseits $\mu_n = m_n$, so gilt nach (9.16) bzw. (9.17):

$a_{n+1} = 1$ und $b_{n+1} = 0$, so daß $1 - (1 - q)\, b_{n+1} = 1 = a_{n+1}$.

Zu (10.52), (10.53) und (10.54):

Beweis per Induktion:

Induktionsanfang (n = 0):

Definitionsgemäß gilt: $q < a_0 = 1$, also (10.52),

$0 = b_0 < 1$, also (10.53),

$0 < m_0 = \frac{1}{a_0}(1 - b_0) = 1$ also (10.54).

Schluß von n auf n+1:

Es gelte (10.52), (10.53) und (10.54) für $n \in \mathbb{N}$.

Falls $\mu_n = m_n$, so gilt nach (9.16) und (9.17):

$q < a_{n+1} = 1$, also (10.52),

$0 = b_{n+1} < 1$, also (10.53),

$0 < m_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}(1 - b_{n+1}) = 1$, also (10.54).

Falls $\mu_n < m_n$, so folgt wegen $\alpha_n \in [0,1]$ und (10.51):

$$1 \geq a_n \geq a_{n+1} = a_n\, \alpha_n = a_n\, (1 - (1 - q)\, \mu_n) > a_n\, (1 - (1 - q)\, m_n) =$$

$$= a_n - (1 - q)\, (1 - b_n) = 1 - (1 - q)\, b_n - (1 - q)\, (1 - b_n) = q ,$$

also (10.52).

Ferner gilt dann

$$0 \leq b_{n+1} = b_n + \mu_n\, a_n < b_n + m_n\, a_n = b_n + \frac{1}{a_n}(1 - b_n)\, a_n = 1 ,$$

also (10.53).

Mit (10.52) und (10.53) erhält man $m_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}(1 - b_{n+1}) > 0$.

Wegen (10.51) gilt außerdem $1 - (1 - q)\, b_{n+1} = a_{n+1}$, so daß

$\frac{1}{a_{n+1}} (1 - b_{n+1}) + \frac{1}{a_{n+1}} q\, b_{n+1} = 1$ und damit

$$m_{n+1} = 1 - q \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \leq 1.$$

Folglich gilt auch (10.54).

Zu (10.55)

Es gilt mit (10.51) und (10.54):

$$\mu_n = m_n \iff \alpha_n = 1 - (1 - q)\, m_n$$
$$\iff a_n \alpha_n = a_n (1 - (1 - q)\, m_n) = a_n - (1 - q)(1 - b_n)$$
$$= 1 - (1 - q)\, b_n - (1 - q)(1 - b_n) = q \,. \quad \blacktriangle$$

X.9 Hilfssatz

Es seien X, Z Banachräume, $\emptyset \neq D$ offen $\subset X$, $F : D \to Z$, $x_o \in D$, $\beta \in \mathbb{R}_+$, $q \in (0,1)$.

Mit $r \geq \frac{\beta \|F(x_o)\|}{1 - q}$ und $M_o := M(F,x_o) \cap \overline{S}(x_o,r)$ gelte:

(V1) M_o ist abgeschlossen

(V2) F ist auf M_o regulär mit der Regularitätskonstanten β

(V3) F' erfüllt die Lipschitzbedingung $L3(M_o)$.

Es sei $n \in \mathbb{N}_o$ fest.

Für $i \in \mathbb{N}_o$ mit $i \leq n$ seien alle Größen aus EV4 wohldefiniert und es gelte $x_n \in M_o$ mit

$$(10.56)_n \quad \|F(x_n)\| \leq a_n\, q^{k_n} \|F(x_o)\|$$

$$(10.57)_n \quad \forall\, i \leq n : \quad \|x_n - x_i\| \leq \frac{a_i\, q^{k_i} - a_n\, q^{k_n}}{1 - q} \beta \|F(x_o)\|$$

(B1) Dann ist x_{n+1} mit allen zugehörigen Konstanten nach EV4 wohldefiniert und es gilt $x_{n+1} \in M_o$, sowie

$$(10.58) \quad \|F(x_{n+1})\| \leq \alpha_n \|F(x_n)\|$$

$$(10.56)_{n+1} \quad \|F(x_{n+1})\| \leq a_{n+1}\, q^{k_{n+1}} \|F(x_o)\| \quad \text{und}$$

$$(10.57)_{n+1} \quad \forall\, i \le n+1: \quad \|x_{n+1} - x_i\| \le \frac{a_i\, q^{k_i} - a_{n+1}\, q^{k_{n+1}}}{1-q}\ \beta\, \|F(x_o)\|.$$

Beweis:

Analog wie im Beweis von Satz VII.5 und Satz X.6 existiert wegen (V2) und (V3) zu M_o eine offene Umgebung U mit den Eigenschaften

(10.59) $U \subset D$

(10.60) F ist auf U stetig Fréchet-differenzierbar

(10.61) Mit K3 und $\varkappa$ aus Definition X.3 gilt (10.4), (10.5) und (10.6) für alle $x \in M_o$, $y \in X$, $\mu \in [0,1]$.

Wegen $x_n \in M_o$ ist nach (V2) sowohl $F(x_n)$ als auch $F'^{-1}(x_n)$ wohldefiniert mit $\|F'^{-1}(x_n)\| \le \beta$. Also ist Δx_n wohldefiniert und man kann setzen

(10.62) $\forall\, \mu \in [0,1]: \quad x_n(\mu) := x_n + \mu\, \Delta x_n$.

Wegen der Offenheit von U existiert zu $x_n \in M_o \subset U$ sicher ein $\varepsilon_o \in (0, m_n]$, so daß

(10.63) $\forall\, \mu \in [0,\varepsilon_o]: \quad x_n(\mu) \in U$

gilt, woraus sich mit (10.59) insbesondere

(10.64) $\forall\, \mu \in [0,\varepsilon_o]: \quad x_n(\mu) \in D$

ergibt. Wegen (10.63) folgt mit (10.61) und (10.4)

(10.65) die Funktion $K3(x_n, \Delta x_n, .)$ ist auf $[0,\varepsilon_o]$ stetig.

Also existiert

(10.66) $$\varkappa_1 := \max_{\mu \in [0,\varepsilon_o]} K3(x_n, \Delta x_n, \mu) .$$

Ferner existiert eine Konstante $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_o]$ mit

(10.67) $\varepsilon_1\, \varkappa_1\, \|F'^{-1}(x_n)\|\, \|\Delta x_n\| \le 2\, q$.

Definiert man nun für $i = n$ zu x_n und $y_n := \Delta x_n$ die Funktion $K(x_n, y_n, .) : [0,1] \to \mathbb{R}_+^o$ mit der nach (V3) gemäß Definition X.3 existierenden Funktion K3 vermöge

(10.68) $\forall\, \mu \in [0,1]: \quad K(x_n, y_n, \mu) := K3(x_n, y_n, \mu)$,

sowie $T : D \to Z$ vermöge

(10.69) $\forall\, x \in D: \quad T(x) := F(x)$

und

(10.70) $\Gamma_n := F'^{-1}(x_n)$,

so gilt in Hilfssatz VII.3 für $\bar{\mu}_n := \varepsilon_1$ und $d := 0$

(V1) wegen (10.64)

(V2) wegen (10.60) und (10.63)

(V3) wegen (10.65), (10.61), (10.63) und (10.4)

(V4) wegen (10.3) nach (V2) von Hilfssatz X.9, weil $x_n \in M_o$

(V5) wegen $\|I - T'(x_n)\,\Gamma_n\| = \|I - F'(x_n)\,F'^{-1}(x_n)\| = 0$.

Folglich erhält man (B1) aus Hilfssatz VII.3.

Nach (10.66) und (10.67) gilt

(10.71) $\forall\ \mu \in [0,\varepsilon_1] :\quad \mu\, K(x_n,y_n,\mu)\, \|\Gamma_n\|\, \|\Gamma_n\, T(x_n)\| \le 2q$.

Deshalb ergibt sich in (B1) $\bar{\mu}_n = \varepsilon_1$, so daß

(10.72) $\forall\ \mu \in [0,\varepsilon_1] :\quad x_n(\mu) \in M(F,x_o)$

mit $\|F(x_n(\mu))\| \le (1 - (1-q)\,\mu)\, \|F(x_n)\|$.

Gemäß Definition (10.68), (10.69), (10.70) und (9.11) ist

(10.73) $\forall\ \mu \in [0,m_n] :\quad \mu\, K(x_n,y_n,\mu)\, \|\Gamma_n\|\, \|\Gamma_n\, T(x_n)\| = \eta_n(\mu)$.

Sei nun

$N_1 := \{\, \bar{\mu} \in [0,m_n] \mid \forall\ \mu \in [0,\bar{\mu}] :\ x_n(\mu) \in M_o \,\}$,

$N_2 := \{\, \bar{\mu} \in [0,m_n] \mid \forall\ \mu \in [0,\bar{\mu}] :\ \eta_n(\mu) \le 2q \,\}$

und

$s_1 := \sup N_1$ sowie $s_2 := \sup N_2$.

Dann gilt $s_2 \ge \varepsilon_1$ nach (10.71) und (10.73).

Außerdem ist auch $s_1 \ge \varepsilon_1$. Nach (10.72) gilt nämlich

$\forall\ \mu \in [0,\varepsilon_1] \subset [0,m_n] :\quad x_n(\mu) \in M(F,x_o)$.

Mit $(10.56)_n$ und $(10.57)_n$ für $i := 0$ erhält man ferner

$$\begin{aligned}
\forall\ \mu \in [0,\varepsilon_1] :\quad \|x_n(\mu) - x_o\| &\le \|x_n(\mu) - x_n\| + \|x_n - x_o\| \\
&\le \mu\,\beta\,\|F(x_n)\| + \frac{1 - a_n\, q^{k_n}}{1-q}\,\beta\,\|F(x_o)\| \\
&\le \mu\,\beta\,a_n\,q^{k_n}\,\|F(x_o)\| + \frac{1 - a_n\, q^{k_n}}{1-q}\,\beta\,\|F(x_o)\| \\
&= \frac{1 - a_n\, q^{k_n} + (1-q)\,\mu\, a_n\, q^{k_n}}{1-q}\,\beta\,\|F(x_o)\|
\end{aligned}$$

$$= \frac{1 - (1 - (1 - q)\,\mu)\, a_n\, q^{k_n}}{1 - q}\ \beta\ \|F(x_o)\|$$

$$< \frac{\beta\ \|F(x_o)\|}{1 - q} \leq r\ ,$$

so daß

$\forall\ \mu \in [0,\varepsilon_1]:\quad x_n(\mu) \in M_o\ .$

Durch indirekten Beweis läßt sich nun zeigen, daß

(10.74) $\quad s_2 \leq s_1\ .$

Angenommen, es sei

(10.75) $\quad s_1 < s_2\ .$

Dann gilt $[0,s_1] \subset [0,s_2)$ und damit definitionsgemäß

(10.76) $\quad \forall\ \mu \in [0,s_1]:\quad \eta_n(\mu) \leq 2\,q\ .$

wegen der Abgeschlossenheit von M_o nach (V1) ist außerdem $s_1 = \max N_1$, so daß

(10.77) $\quad \forall\ \mu \in [0,s_1]:\quad x_n(\mu) \in M_o\ .$

Mit K nach (10.68), T nach (10.69) und Γ_n nach (10.70) sind dann für $\bar{\mu}_n := s_1$ mit d := 0 wiederum die Voraussetzungen von Hilfssatz VII.3 erfüllt und zwar

(V1) wegen (10.77) und $M_o \subset D$
(V2) wegen (10.77) und (V2) von Hilfssatz X.9
(V3) wegen (10.77), (10.61) und (10.4)
(V4) wegen (10.77) und (10.3) nach (V2) von Hilfssatz X.9
(V5) wegen $\|I - T'(x_n)\,\Gamma_n\| = \|I - F'(x_n)\,F'^{-1}(x_n)\| = 0\ .$

In (B1) von Hilfssatz VII.3 ergibt sich dann $\tilde{\mu}_n = s_1$ wegen (10.76), so daß aus (7.7) speziell

$$\|F(x_n(s_1))\| \leq (1 - (1 - q)\,s_1)\ \|F(x_n)\| \leq (1 - (1 - q)\,s_1)\ \|F(x_o)\|$$

$$< \|F(x_o)\|$$

folgt. Also liegt $x_n(s_1)$ im Inneren von $M(F,x_o)$.

Gleichzeitig gilt wegen $(10.56)_n$ und $(10.57)_n$

$$\|x_n(s_1) - x_o\| \leq \|x_n(s_1) - x_n\| + \|x_n - x_o\|$$

$$\leq s_1 \beta \|F(x_n)\| + \frac{1 - a_n q^{k_n}}{1 - q} \beta \|F(x_o)\|$$

$$\leq \frac{1 - (1 - (1 - q) s_1) a_n q^{k_n}}{1 - q} \beta \|F(x_o)\|$$

$$< \frac{\beta \|F(x_o)\|}{1 - q} \leq r ,$$

so daß $x_n(s_1)$ auch im Inneren von $\overline{S}(x_o,r)$ liegt.

Weil $1 \geq m_n \geq s_2 > s_1 \geq \varepsilon_1 > 0$ gilt und $x_n(.)$ in s_1 stetig ist, existiert dann aber ein $\varepsilon_3 > 0$, so daß

$\forall\, \delta \in [0,\varepsilon_3] : \quad x_n(s_1+\delta) \in M_o$.

Dies steht aber im Widerspruch zur Definition von s_1, so daß die Annahme (10.75) falsch ist. Somit gilt (10.74), woraus sich

(10.78) $\quad N_2 \subset N_1$

ergibt.

Mit (10.4) ist demzufolge η_n bezüglich μ zumindest solange stetig, bis entweder $\mu = m_n$ oder $\eta_n(\mu) = 2q$ erreicht ist.

Deshalb existiert ein μ_n mit (9.12) und (9.13), so daß x_{n+1} nach Schritt 2 von EV4 wohldefiniert ist. Gleichzeitig sind dann auch die zugehörigen Konstanten eindeutig festgelegt.

Wegen (9.12) ist

(10.79) $\quad \mu_n \in N_2$

und mit (10.78) folglich auch

(10.80) $\quad \mu_n \in N_1$,

so daß $x_{n+1} = x_n(\mu_n) \in M_o$.

Wegen (10.80) sind die Voraussetzungen von Hilfssatz VII.3 bei Wahl von K nach (10.68), T nach (10.69) und Γ_n nach (10.70) mit $d := 0$ auch für $\overline{\mu}_n := \mu_n$ erfüllt, wobei sich wegen (10.79) in (B1) $\tilde{\mu}_n = \mu_n$ ergibt. Aus (7.7) folgt damit speziell

(10.58) $\quad \|F(x_{n+1})\| \leq (1 - (1 - q) \mu_n) \|F(x_n)\| = \alpha_n \|F(x_n)\|$.

Zusammen mit $(10.56)_n$ ergibt sich daraus

(10.81) $\quad \|F(x_{n+1})\| \leq \alpha_n a_n q^{k_n} \|F(x_o)\|$.

Es gilt daher $(10.56)_{n+1}$, wenn gezeigt wird, daß

$$(10.82) \quad \alpha_n a_n q^{k_n} = a_{n+1} q^{k_{n+1}} .$$

Falls nun $\mu_n < m_n$, so ist $\alpha_n a_n = a_{n+1}$ nach (9.19) und $k_{n+1} = k_n$ nach (9.21), so daß (10.82) gilt.

Falls $\mu_n = m_n$, so gilt $a_{n+1} = 1$ nach (9.16), $k_{n+1} = k_n + 1$ nach (9.18) und $\alpha_n a_n = q$ nach (10.55). Also erhält man auch dafür die Gültigkeit von (10.82) wegen

$$\alpha_n a_n q^{k_n} = q\, q^{k_n} = q^{k_n+1} = a_{n+1} q^{k_{n+1}} .$$

$(10.57)_{n+1}$ folgt unter Berücksichtigung von $(10.56)_n$ und $(10.57)_n$ ebenfalls mit (10.82). Es gilt nämlich für $i \leq n$:

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_i\| &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - x_i\| \\
&\leq \mu_n \beta \|F(x_n)\| + \frac{a_i q^{k_i} - a_n q^{k_n}}{1-q} \beta \|F(x_o)\| \\
&\leq (\mu_n a_n q^{k_n} + \frac{a_i q^{k_i} - a_n q^{k_n}}{1-q}) \beta \|F(x_o)\| \\
&= \frac{a_i q^{k_i} - (1 - (1-q)\mu_n) a_n q^{k_n}}{1-q} \beta \|F(x_o)\| \\
&= \frac{a_i q^{k_i} - \alpha_n a_n q^{k_n}}{1-q} \beta \|F(x_o)\| \\
&= \frac{a_i q^{k_i} - a_{n+1} q^{k_{n+1}}}{1-q} \beta \|F(x_o)\| ,
\end{aligned}$$

und für $i = n+1$ gilt trivialerweise

$$\|x_{n+1} - x_i\| = \frac{a_{n+1} a^{k_{n+1}} - a_{n+1} q^{k_{n+1}}}{1-q} \beta \|F(x_o)\| = 0 . \quad \blacktriangle$$

X.10 Ausführbarkeitssatz für EV4

Es seien X, Z Banachräume, $\emptyset \neq D$ offen $\subset X$, $F : D \to Z$, $x_o \in D$, $\beta \in \mathbb{R}_+$, $q \in (0,1)$.

Mit $r \geq \frac{\beta \, \|F(x_o)\|}{1 - q}$ und $M_o := M(F,x_o) \cap \overline{S}(x_o,r)$ gelte:

(V1) M_o ist abgeschlossen

(V2) F ist auf M_o regulär mit der Regularitätskonstanten β

(V3) F' erfüllt die Lipschitzbedingung $L3(M_o)$

(B1) Dann gilt:

Das Einbettungsverfahren EV4 ist mit F, q und der nach (V3) gemäß Definition X.3 existierenden Funktion K3 für x_o ausführbar.

Beweis:

Es ist nachzuweisen, daß EV4 wohldefiniert und lösungskonvergent ist.

Die Wohldefiniertheit folgt induktiv unmittelbar mit Hilfssatz X.9, denn die Voraussetzungen dieses Hilfssatzes folgen gemäß Behauptung für x_{n+1}, falls sie für x_n erfüllt sind. Für n = 0 ergeben sich die Voraussetzungen von Hilfssatz X.9 aber aus denen von Satz X.10, denn (V1), (V2) und (V3) sind bei beiden Sätzen identisch, und es gilt

$(10.56)_o$ da $a_o = 1$, $k_o = 0$ und somit $\|F(x_o)\| \leq a_o \, q^{k_o} \, \|F(x_o)\| = \|F(x_o)\|$

sowie

$(10.57)_o$ da $\|x_o - x_o\| \leq \frac{a_o \, q^{k_o} - a_o \, q^{k_o}}{1 - q} \, \beta \, \|F(x_o)\| = 0$.

Also ist x_n für alle $n \in \mathbb{N}$ nach EV4 wohldefiniert und es gelten hierfür die Aussagen $(10.56)_n$, $(10.57)_n$ und (10.58).

Zum Nachweis der Lösungskonvergenz von EV4 wird gezeigt, daß $\{ x_i \mid i \in \mathbb{N}_o \}$ eine Cauchy-Folge bildet. Hierzu wird zunächst indirekt die Gültigkeit der folgenden Aussage bewiesen:

(10.83) $\forall \, i \in \mathbb{N} \; \exists \, n \geq i : \quad \mu_n = m_n$.

Nimmt man an, (10.83) sei falsch, so gilt

(10.84) $\exists \, i_o \in \mathbb{N} \; \forall \, n \geq i_o : \quad \mu_n < m_n$.

Gemäß (9.13) muß dann

(10.85) $\forall \, n \geq i_o : \quad 2 \, \rho \, q \leq \eta_n(\mu_n)$

erfüllt sein. Dies impliziert, daß $\forall \, n \geq i_o : \quad \|F(x_n)\| > 0$.

wegen $\eta_n(\mu_n) \le \mu_n \beta^2 \kappa \|F(x_n)\| \le \mu_n \beta^2 \kappa \|F(x_{i_o})\|$ gilt dann

$$\forall\, n \ge i_o : \quad \mu_n \ge \frac{2 \rho q}{\beta^2 \kappa \|F(x_{i_o})\|} ,$$

so daß

$$\forall\, n \ge i_o : \quad \alpha_n = 1 - (1 - q)\, \mu_n \le \bar{\alpha}_{i_o} := 1 - (1 - q) \frac{2 \rho q}{\beta^2 \kappa \|F(x_{i_o})\|} < 1.$$

Unter Berücksichtigung von (10.58) gilt weiter

$$\forall\, n > i_o : \quad \|F(x_n)\| \le \prod_{k=i_o}^{n-1} \alpha_k \|F(x_{i_o})\| \le \bar{\alpha}_{i_o}^{n-i_o-1} \|F(x_{i_o})\| .$$

Da $\bar{\alpha}_{i_o} < 1$ existiert zu i_o ein $n_o > i_o$ mit

$$\bar{\alpha}_{i_o}^{n_o-i_o-1} \|F(x_{i_o})\| \le \frac{2 \rho q}{\beta^2 \kappa} .$$

Hierfür erhält man dann wegen (9.13)

$$2 \rho q \le \eta_{n_o}(\mu_{n_o}) \le \mu_{n_o} \beta^2 \kappa \|F(x_{n_o})\| \le \mu_{n_o} \beta^2 \kappa\, \bar{\alpha}_{i_o}^{n_o-i_o-1} \|F(x_{i_o})\|$$

$$\le \mu_{n_o} \beta^2 \kappa \frac{2 \rho q}{\beta^2 \kappa} ,$$

so daß $\mu_{n_o} \ge 1$ folgt.

Das steht aber im Widerspruch zu (10.84), denn nach (10.54) ist $m_{n_o} \le 1$.

Also ist (10.83) bewiesen.

Weil nach (9.18) $k_{n+1} = k_n + 1$, falls $\mu_n = m_n$, folgt mit (10.83), daß

(10.86) $\lim_{i \to \infty} k_i = \infty .$

Deshalb existiert zu beliebigem $\varepsilon > 0$ stets ein $i_o \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall\, i \ge i_o : \quad \frac{q^{k_i}}{1 - q} \beta \|F(x_o)\| < \varepsilon .$$

In Verbindung mit (10.57) erhält man daher

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, i_o \in \mathbb{N}\ \forall\, i \ge i_o ,\ n \ge i :$$

$$\|x_n - x_i\| \leq \frac{a_i\, q^{k_i} - a_n\, q^{k_n}}{1 - q}\ \beta\ \|F(x_o)\| \leq \frac{q^{k_i}}{1 - q}\ \beta\ \|F(x_o)\| < \varepsilon\ .$$

Also ist $\{ x_i \mid i \in \mathbb{N}_o \}$ eine Cauchy-Folge in M_o, die in dem Banachraum X gegen einen eindeutig bestimmten Grenzwert x* konvergiert, der wegen (V1) ebenfalls in M_o liegt.

Es bleibt zu zeigen, daß x* Nullstelle von F ist.

Wie bereits festgestellt, gelten die Voraussetzungen und Aussagen von Hilfssatz X.9 für alle $n \in \mathbb{N}_o$, also insbesondere

$$(10.56)_n \quad \|F(x_n)\| \leq a_n\, q^{k_n}\, \|F(x_o)\|\ .$$

Folglich erhält man wegen der Stetigkeit von F unter Berücksichtigung von (10.86), (10.52) und der Tatsache, daß $q \in (0,1)$:

$$\|F(x^*)\| = \lim_{n\to\infty} \|F(x_n)\| \leq \lim_{n\to\infty} a_n\, q^{k_n}\, \|F(x_o)\| = 0\ .$$

Mithin ist EV4 wohldefiniert und lösungskonvergent, also ausführbar. ▲

X.11 Bemerkungen

X.11.1

Bei Gültigkeit der Voraussetzungen von Satz X.10 gilt $(10.57)_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ und jedes $n \geq i$ gilt damit stets:

$$\|x_n - x_i\| \leq \frac{a_i\, q^{k_i} - a_n\, q^{k_n}}{1 - q}\ \beta\ \|F(x_o)\| \leq \frac{a_i\, q^{k_i}}{1 - q}\ \beta\ \|F(x_o)\|\ .$$

Hieraus ergibt sich durch Grenzübergang ($n\to\infty$) unmittelbar die Fehlerabschätzung

$$(10.87) \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_o : \quad \|x^* - x_i\| \leq \frac{a_i\, q^{k_i}}{1 - q}\ \beta\ \|F(x_o)\|\ .$$

X.11.2

EV4 geht nach endlich vielen Iterationsschritten in das gewöhnliche Newton-Verfahren über, wenn die Voraussetzungen von Satz X.10 erfüllt sind. Aus (10.56) in Verbindung mit (10.86) erhält man nämlich

$$\lim_{i\to\infty} \|F(x_i)\| = 0\ ,$$

so daß dann sicher ein $i_o \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\forall\, i \geq i_o : \quad \eta_i(\mu_i) \leq \mu_i\, \beta^2\, \kappa\, \|F(x_i)\| < 2\, \rho\, q\ .$$

Nach (9.13) kann das aber nur gelten, wenn gleichzeitig

$$\forall\, i \geq i_o : \quad \mu_i = m_i \,.$$

Falls aber $\mu_i = m_i$, so ist $a_{i+1} = 1$ nach (9.16) und $b_{i+1} = 0$ nach (9.17) und damit

$$m_{i+1} = \frac{1}{a_{i+1}} (1 - b_{i+1}) = 1 \,.$$

Also gilt

$$\forall\, i > i_o : \quad \mu_i = 1 \quad \text{bzw.}$$

$$\forall\, i > i_o : \quad x_{i+1} = x_i - F'^{-1}(x_i)\, F(x_i) \,.$$

Unter den Voraussetzungen von Satz X.10 läßt sich für EV4 bei hinreichend großem Index $i \in \mathbb{N}$ nachweisen, daß bezüglich x_i die Voraussetzungen von Satz IV.20 erfüllt sind, wenn $F(x_i) \neq 0$. Da dieser Nachweis völlig analog zu demjenigen für EV3 mit $d = 0$ in Bemerkung X.7.1 verläuft, kann er hier unterbleiben.

Neben (10.87) lassen sich für EV4 gegebenenfalls also auch die Fehlerabschätzungen (B4) und (B5) aus Satz IV.20 verwenden, wenn die Iterierten bereits hinreichend nahe bei der Lösung liegen.

X.11.3

wenn die Voraussetzungen von Satz X.10 für ein festes $q_o \in (0,1)$ erfüllt sind, so gilt dies erst recht für alle $q \in (0,q_o]$, da dafür

$$\frac{\beta\, \|F(x_o)\|}{1 - q} \leq \frac{\beta\, \|F(x_o)\|}{1 - q_o} \,.$$

Folglich ergibt sich für jedes $q \in (0,q_o]$ die Existenz einer Nullstelle x^*_q von F mit

$$\|x^*_q - x_o\| \leq \frac{1}{1 - q}\, \beta\, \|F(x_o)\| \,.$$

Aus Stetigkeitsgründen muß daher auch eine Nullstelle x^* von F mit

$$\|x^* - x_o\| \leq \beta\, \|F(x_o)\|$$

existieren, so daß aus den Voraussetzungen von Satz X.10 stets auch auf die Existenz einer Nullstelle x^* von F in $\overline{S}(x_o, \beta\|F(x_o)\|)$ geschlossen werden kann.

Da die Voraussetzungen von Satz X.6 diejenigen von Satz X.10 implizieren,

gilt die obige Aussage unter diesen Voraussetzungen natürlich erst recht.

X.11.4

In [19] wird von FEILMEIER - LORY - SCHEURING - WACKER mit Satz 4.3.4 eine Konvergenzaussage für ein unter (4.3.7) beschriebenes Verfahren nach der Methode des minimalen Residuums angegeben. Diese auf KRASNOSELSKII [32] zurückgehende Aussage bezieht sich auf die Bestimmung der Nullstelle eines Operators der Form

$$T(x) = x - A(x)$$

in einem Hilbertraum. Die Voraussetzungen zu Satz 4.3.4 sind mit denjenigen von Satz X.10 weitgehend vergleichbar.

Auf einer Kugel um den Startwert x_o mit Radius R soll der Operator T stetig Fréchet-differenzierbar sein, wobei dort für alle x, y

a) $\|T'(x)\| \leq a \quad \text{mit} \quad a > 0$

b) $\|T'(x) - T'(y)\| \leq L \|x - y\| \quad \text{mit } L \geq 0$

c) $\forall\, h \in H: \quad \|(T'(x)h,h)\| \geq c^{-1} \|h\|^2 \quad \text{mit} \quad c > 0$

d) $q := \sqrt{1 - \frac{1}{a^2 c^2}} + \frac{c^2 L \delta_o}{2} < 1$

e) $r_o := \frac{c \|T(x_o)\|}{1 - q} \leq R .$

Aus b) folgt für T' auf $\overline{S}(x_o,R)$ die Lipschitzeigenschaft L3 mit der Lipschitzkonstanten L.
Aus c) ergibt sich für T auf $\overline{S}(x_o,R)$ die Regularität mit der Regularitätskonstanten c.
Da der Operator T auf dem ganzen Raum definiert ist, ist auch die Abgeschlossenheit von $M_o := M(T,\|T(x_o)\|) \cap \overline{S}(x_o,R)$ gesichert.

Mithin läßt sich stets EV4 ausführen, wenn die Voraussetzungen zum oben genannten Satz 4.3.4 erfüllt sind. Dabei kann jedes beliebige q verwendet werden, für das

$$\frac{c \|T(x_o)\|}{1 - q} < R .$$

Die obigen Bedingungen a) und d) müssen zur Ausführbarkeit von EV4 nicht erfüllt sein.

Als Alternative zur Anwendung des Verfahrens (4.3.7) auf die Ausgangsgleichung $T(x) = x - A(x) = 0$ wird in [19] auch die stufenweise Verwendung dieses Verfahrens für die eingebettete Gleichung

(10.88) $\quad \forall\ (s,x) \in J \times H : \quad T(s,x) = x - s\,A(x) = 0$

diskutiert. In Satz 4.3.11 werden Bedingungen angegeben, unter denen eine stufenweise Konvergenz des Verfahrens (4.3.7) für (10.88) bei hinreichend kleiner (gleichmäßiger) Stufeneinteilung gesichert ist. Da diese Bedingungen auf den Voraussetzungen von Satz 4.3.4 fußen (im Beweis werden für jede Stufe die Voraussetzungen von Satz 4.3.4 verifiziert), sind sie notwendigerweise erheblich strenger, als die Ausführbarkeitsbedingungen von Satz X.10 für EV4 (angewendet auf die Ausgangsgleichung). Es liegt also auch hier wiederum die Situation vor, daß die Voraussetzungen für die Durchführung eines verallgemeinerten Iterationsverfahrens erheblich stärker sind, als die Voraussetzungen für das speziellere Verfahren EV4. Die Einbettung (10.88) würde sich unter dem Gesichtspunkt der Konvergenzvoraussetzungen somit eigentlich erübrigen. Sie läßt sich nur rechtfertigen durch die Tatsache, daß ein Schritt des Verfahrens (4.3.7) weniger aufwendig als ein Schritt von EV4 sein kann, da die Invertierung von $F'(x_n)$ hierin nicht erforderlich ist.

X.11.5

Das Verfahren EV4 läßt sich als Stufenverfahren interpretieren, wobei für jedes $n \in \mathbb{N}$ jeweils durch k_n die betreffende zugehörige Stufe angegeben wird. Gemäß Abschätzung (10.56) besitzt EV4 die Eigenschaft, daß jeweils nach Durchlaufen einer Stufe eine Normreduktion für F um den Faktor q erzielt wird. In [44] wird von PETRY ein gedämpftes Newton-Verfahren mit der gleichen Eigenschaft beschrieben. Während in EV4 im Verlauf einer Stufe alle wesentlichen Größen wie μ_i, $F(x_i)$ und $F'^{-1}(x_i)$ variabel sind und der Dämpfungsfaktor μ_i jeweils individuell möglichst optimal bestimmt wird, bleibt bei dem Verfahren nach PETRY in der i - ten Stufe der Wert $F(x_i)$ vom Beginn der Stufe für alle weiteren Iterationen der Stufe erhalten und es wird mit einem für die ganze Stufe konstanten Dämpfungsfaktor $h_i = \frac{1}{n_i}$ gearbeitet.

Das Verfahren von PETRY hat bezogen auf einen Operator F und ausgehend von einem Startwert x_1^0 die folgende Form (vergl. (2.3) in [44]) :

(10.89) $\forall\, i \in \mathbb{N}:\quad h_i := \frac{1}{n_i}$

$$x_i^{\nu+1} := x_i^{\nu} - h_i\, F'^{-1}(x_i^{\nu})\, F(x_i^{o}) \text{ für } 1 \le \nu \le n_i - 1$$

$$x_{i+1}^{o} := x_i^{n_i} .$$

Zu Beginn jeder Stufe ist dabei die Anzahl n_i der Schritte in der jeweiligen Stufe und damit verbunden der Dämpfungsfaktor h_i geeignet festzulegen. Der Dämpfungsfaktor h_i muß sich dabei zwangsläufig an der schlechtesten Stelle des Iterationsweges von x_i^o nach $x_i^{n_i}$ orientieren, so daß in der Regel erheblich mehr Schritte pro Stufe erforderlich werden als bei EV4. Darüber hinaus erfordert die Festlegung von h_i eine Abschätzung der hierfür relevanten Größen jeweils über eine Umgebung des ganzen in der Stufe zurückzulegenden Weges. Im Gegensatz zu den Ungleichungen (9.12) bzw. (9.13), die für die Wahl von μ_i in EV4 maßgebend sind, führt dies für h_i in [44] zu der Voraussetzung (vergl. (3.3) aus [44]):

(10.90) $h_i\, \beta^2 \sup \{ \|F''(x)\|\, \|F(x_i^o)\| \mid \|x - x_i^o\| \le q^{i-1}\beta \|F(x_o)\| \} \le 2q .$

Das Verfahren (10.89) ist also nur durchführbar, wenn die Regularitätskonstante β (in [44] wird hierfür die äquivalente Größe $\frac{1}{c}$ verwendet) a-priori berechnet oder abgeschätzt werden kann und wenn eine Abschätzung für die Lipschitzschranke von F' (in [44] wird hierzu $\|F''(x)\|$ verwendet) jeweils über eine Kugel um x_i^o mit Radius $q^{i-1}\, \beta\, \|F(x_o)\|$ möglich ist. In EV4 benötigt man dagegen die Abschätzung der Lipschitzschranke jeweils nur auf dem Strahl von x_i in Richtung der Newton-Korrektur. Ferner arbeitet EV4 lediglich mit $\|F'^{-1}(x_i)\|$ beziehungsweise mit einer Abschätzung hiervon. Das bedeutet, daß die Regularitätskonstante β zur Durchführung des Verfahrens EV4 gar nicht bekannt sein muß. Die Existenz dieser Schranke für $\|F'^{-1}(x)\|$ ist bei EV4 nur zur (theoretischen) Sicherung der Konvergenz erforderlich.

Da auch beim Verfahren (10.89) mit jedem Schritt die Norm von $F(x_i^{\nu})$ reduziert wird, ist es ungünstig, in der Abschätzung (10.90) für h_i sowie in (10.89) jeweils $F(x_i^o)$ konstant zu belassen. Ein kleinerer Wert für $\|F(x_i^{\nu})\|$ würde eine größere Schrittweite h_i zulassen und damit eventuell den Aufwand reduzieren.

Zusammenfassend kann man sagen, daß EV4 gegenüber (10.89) mit nahezu identischen Ausführbarkeitsvoraussetzungen bei der Durchführung die folgenden Vorteile bietet:

a) Die Durchführung jedes Iterationsschrittes erfordert einen geringeren numerischen Aufwand, weil weniger theoretische Abschätzungen erforderlich sind.

b) Die individuelle adaptive Wahl der Dämpfungsparameter μ_i kann durch die Verwendung lokaler Konstanten zu einer erheblich geringeren Anzahl an Iterationsschritten pro Stufe führen, so daß sich der Gesamtaufwand zur Bestimmung der Lösung entsprechend reduziert.

XI. ERLÄUTERUNG EINIGER PROBLEME BEI DER PRAKTISCHEN DURCHFÜHRUNG VON EINBETTUNGSVERFAHREN AN EINEM EINFACHEN BEISPIEL

Will man die bei Einbettungsverfahren auftretenden Probleme veranschaulichen, so stellt man fest, daß eine graphische Darstellung nur bei ein- oder zweidimensionalen Funktionen F noch möglich ist, weil durch die Einbettung die Dimension der Gleichung erhöht wird. Für die Erläuterung der möglicherweise auftretenden Probleme ist es außerdem wünschenswert, den Verlauf von F genau zu kennen, damit man das Verhalten eines Einbettungsverfahrens beurteilen kann.

Es sei deshalb die Funktion

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vermöge $\forall x \in \mathbb{R} : \quad F(x) := 2x^3 - 9x^2 + 12x$

betrachtet.

F ist ein Polynom mit $x^* = 0$ als einziger Nullstelle, einem lokalen Maximum bei $x = 1$ und einem lokalen Minimum bei $x = 2$. (Vergleiche Figur XI.3, $\lambda = 1.0$)

Stellt man sich bezüglich der Nullstelle x^* auf den Standpunkt eines Unwissenden und will ein Iterationsverfahren zu deren Bestimmung heranziehen, so hängt es ganz von der Wahl der Startnäherung x_0 ab, welches Verfahren sich als geeignet erweist. Sowohl für das Newton-Verfahren selbst wie auch für die gedämpften Newton-ähnlichen Verfahren EV3 und EV4 lassen sich die Voraussetzungen der entsprechenden Konvergenzsätze in einer hinreichend engen Umgebung der Nullstelle verifizieren. Wählt man aber beispielsweise $x_0 = 3$ als Startnäherung, so kann die Konvergenz der oben genannten Verfahren nicht abgesichert werden, da F' zwischen x_0 und x^* bei $x = 1$ und $x = 2$ Singularitäten besitzt. Mit diesem Startwert ist also eine allgemeinere Einbettung erforderlich, und es erhebt sich die Frage, wie die Einbettungsfunktion H gewählt werden soll. Die Entscheidung für die ein oder andere Einbettungsfunktion bildet in der Regel die Basis für Erfolg oder Mißerfolg des gesamten Einbettungsverfahrens. Dies läßt sich leicht demonstrieren. Hierzu seien die Einbettungen

(11.1) $\forall (x,\lambda) \in \mathbb{R} \times J : \quad H^0(x,\lambda) := \lambda F(x) + (1 - \lambda)(x - x_0)$

(11.2) $\forall (x,\lambda) \in \mathbb{R} \times J : \quad H^1(x,\lambda) := \lambda F(x) - (1 - \lambda)(x - x_0)$

betrachtet.

Beides sind affine Einbettungen für F bezüglich x_o. Weil H^o_x bzw. H^1_x jeweils in einer Umgebung des Startwertes x_o eine koniare Inverse besitzt, bezeichnet man diese Art von Einbettungen auch als regularisierende Einbettungen. Solche Einbettungen eignen sich besonders, um singuläre Stellen von F_x an einer Stelle x_o zu überwinden. In Bezug auf die Brauchbarkeit dieser Einbettungen zur Bestimmung der Nullstelle von F stellt sich zuerst die Frage nach der Existenz einer Lösung zu H^o bzw. H^1.

In Figur XI.1 sind für den Startwert $x_o = 3$ die Nullstellen der Einbettung H^1 dargestellt. Offensichtlich gibt es keine stetige Kurve $x : J \to \mathbb{R}$ mit $x(0) = 3$ und $x(1) = x^*$, so daß $\forall \lambda \in J : H^1(x(\lambda),\lambda) = 0$. Dies liegt daran, daß die Fréchet-Ableitung von $-(x - x_o)$ für alle positiven x - Werte von x* wegweist (da < 0). Ausgehend von einem positiven Startwert x_o führt die Anwendung von EV1 bzw. EV2 auf H^1 somit dazu, daß sich die erzeugten Iterierten von x* entfernen. Für H^1 existiert also bei keinem positiven x_o eine Lösung, so daß H^1 bei positiven Startwerten zur Bestimmung von x* ungeeignet ist.

Bei H^o ist die Situation genau umgekehrt. Hier führt die Fréchet-Ableitung von $+(x - x_o)$ für positive x - Werte zu x* hin (da > 0). Es existiert zu jedem $x_o > 0$ eine stetige Kurve von Nullstellen zu H^o, die $(x_o,0)$ mit $(x^*,1)$ verbindet. In Figur XI.2 sind diese Kurven für verschiedene positive Startwerte x_o dargestellt.

Wie man anhand der beiden Einbettungen H^o und H^1 sieht, benötigt man eigentlich für die Konstruktion einer geeigneten Einbettung H Informationen über den Verlauf von F und die Lage von x*. Gerade das Fehlen solcher Informationen ist aber in der Regel der Grund für die Anwendung von Einbettungsverfahren. Bei komplizierten Gleichungen gestaltet sich deshalb die Wahl einer geeigneten Einbettung ausgesprochen problematisch, wenn sich nicht aus der Problemstellung eventuell eine natürliche Parametervariation anbietet. Ebenso wie man durch ein Einbettungsverfahren ausgehend von einer schlechten Startnäherung bei Verwendung einer geeigneten Einbettungsfunktion eine gegen die Lösung konvergente Iterationsfolge erzeugen kann, ist es auch möglich, daß man ausgehend von einer guten Startnäherung eine divergente Folge erhält, wenn die verwendete Einbettungsfunktion ungeeignet ist.

Leider gibt es bis heute keine brauchbaren Kriterien, die die Eignung einer bestimmten Einbettungsfunktion im Hinblick auf die Nullstellenbestimmung für eine gegebene Funktion F a-priori dergestalt absichern, daß die Kriterien vor der Ausführung des Einbettungsverfahrens auch stets verifiziert werden können. In der Regel sind für den Nachweis der Eignungskriterien von Einbettungsfunktionen Kenntnisse über die Funktion F erforderlich, die - wenn sie vorliegen - die Anwendung der Einbettung überflüssig machen, weil sie es gestatten, gleich eine geeignete Startnäherung für ein lokales Verfahren für F auszuwählen.

Für die Anwendung eines Einbettungsverfahrens ist nach der Frage, ob für die Einbettung H eine Lösung existiert, als nächstes die Frage nach der Regularität von H von Belang. In Figur XI.2 sind die Nullstellen von H^o zu verschiedenen Startwerten x_o und außerdem die singulären Punkte von H^o_x eingezeichnet. Man kann dieser Figur entnehmen, daß auf den Kurven, die durch die Nullstellen zu den Startwerten $x_o = 6$ bzw. $x_o = 5$ beschrieben werden, singuläre Stellen von H^o_x existieren. Das bedeutet, daß für diese Startwerte trotz der Existenz einer stetigen Kurve von Nullstellen weder EV1 noch EV2 ausführbar ist. Beide Verfahren würden bei der Ausführung vor Erreichen der Lösung $(x^*,1)$ an einem anderen Wert (x',λ') festlaufen.

Für EV2 kann man sich dies leicht anhand von Figur XI.3 veranschaulichen. Hier sind einige der Homotopiekurven im Übergang von $(x - 6)$ zu $F(x)$ dargestellt. Wie man sieht, vollzieht sich ein langsamer stetiger Übergang von der monoton ansteigenden Geraden $(x - 6)$ zu der Polynomfunktion $F(x)$ mit ihrem lokalen Maximum und Minimum. Während die Kurven von $H^o(x,\lambda)$ bis etwa $\lambda = 0.4$ noch monoton wachsen, hat sich bereits bei $\lambda = 0.5$ ein lokales Maximum und Minimum herausgebildet. Dabei ist das lokale Maximum positiv und das lokale Minimum negativ, so daß $H^o(x,0.5)$ drei Nullstellen besitzt. In EV2 wird nun im i - ten Schritt bei sukzessiver Erhöhung des λ_i - Wertes jeweils eine Näherung von $H^o(x,\lambda_i) = 0$ ermittelt. Bei Annäherung an $\lambda = 0.5$ wird dabei zwangsläufig die größte der drei Nullstellen approximiert. Wächst λ über 0.5 hinaus, so wächst auch der Wert des lokalen Minimums. Dabei gibt es eine Zahl λ', für die das lokale Minimum an einer Stelle x' genau den Wert Null hat, so daß (x',λ') gleichzeitig Nullstelle von H^o und H^o_x ist. Die Stelle x' ergibt sich nach Figur XI.2 als Abszisse zu dem rechten Schnittpunkt der beiden Kurven $H^o_x(x,\lambda) = 0$ und

$H^o(x,\lambda) = 0$ für den Startwert $x_o = 6$. Die Schrittweitensteuerung bezüglich λ erzwingt nun in EV2 über (6.23) und mit Hilfe des Wertes von l_i, daß diese singuläre Stelle (x',λ') nicht überschritten werden kann.

EV1 läuft dagegen an einer anderen Stelle (x',λ') fest. Die Nullstellenkurve von H^o zum Startwert $x_o = 6$ ist keine Lösung von H^o im Sinne von Definition IV.6, denn sie läßt sich nicht als Funktion $x : J \to \mathbb{R}$ darstellen, weil im Bereich von $\lambda = 0.5$ Mehrdeutigkeit vorliegt. Der Verlauf der Nullstellenkurve spiegelt sich für beliebiges $c > 0$ auch in der Form des Randes von $M(H^o,x_o,c)$ wieder (vergleiche $M(H^o,x_o,1)$ in Figur XI.5). Nun fordert EV1 aber in jedem Iterationsschritt eine positive Vergrößerung von λ, um mit dem vergrößerten λ - Wert einen Normreduktionsschritt auszuführen. Auf dem Rand von $M(H^o,x_o,c)$ existiert jedoch ein Punkt (x',λ'), von dem aus durch Vergrößerung des x - Wertes keine Normreduktion möglich ist (lokales Minimum von $H^o(x,\lambda')$ für festes λ'). Auf diesen Punkt läuft das Verfahren EV1 zu, und es kann diesen nicht überwinden, denn dazu wäre eine Reduktion von λ' zu einem kleineren Wert erforderlich.

Anders sind die Verhältnisse zum Beispiel mit dem Startwert $x_o = 3$, denn hier liegt auf der Lösungskurve keine Singularität von H^o_x (vergleiche Figur XI.2). Deshalb sind hierfür die Ausführbarkeitsvoraussetzungen für EV2 gemäß Satz VIII.8 für beliebiges $c > 0$ erfüllt. Das Verfahren EV2 umgeht mit Hilfe der Schrittweitensteuerung für λ selbständig die in der Nähe der Lösung liegenden Singularitäten der Ableitung, indem die Iterationswerte (x_i,λ_i) in genügend naher Umgebung um die Lösung verbleiben. Der Verlauf von EV2 für H^o mit $x_o = 3$ ist in Figur XI.9 skizziert. Man erkennt deutlich, daß die Iterationsschritte in der Nähe der Singularitäten von H^o_x kleiner sind als in deren weiterer Entfernung am Anfang und Ende des Iterationsweges.

Für die Anwendung von EV1 auf H^o ist die Regularität von H^o_x längs der Lösung nicht ausreichend, sondern es muß Regularität auf $M(H^o,x_o,c)$ für ein $c > 0$ gelten. Für den Erfolg von EV1 ist daher auch die Wahl von c ausschlaggebend. In Figur XI.6 und XI.7 sind für H^o mit $x_o = 3$ die Mengen $M(H^o,x_o,c)$ mit $c = 0.5$ bzw. $c = 1.0$ dargestellt. Während in Figur XI.7 die Menge $M(H^o,x_o,1)$ von der Kurve zu $H^o_x(x,\lambda)$ durchlaufen wird, zeigt Figur XI.6, daß $H^o_x(x,\lambda)$ auf $M(H^o,x_o,0.5)$ stets ungleich

Null ist. Das bedeutet, daß die Voraussetzungen von Satz VII.5 für H^o und $x_o = 3$ mit $c = 0.5$ erfüllt sind, mit $c = 1.0$ aber nicht. Der Verlauf von EV1 bei Verwendung von $c = 0.5$ ist mit den verwendeten Dämpfungsfaktoren μ_i in Figur XI.8 skizziert. Man sieht, daß im Vergleich zu EV2 nach Figur XI.9 weniger und dafür größere Iterationsschritte ausgeführt werden. Gleichzeitig kann man die Sensitivität der Dämpfungsfaktoren in Bezug auf Singularitäten von H_x^o feststellen, denn nur in der Nähe der Singularitäten von H_x^o werden Dämpfungsfaktoren $\mu_i < 1$ verwendet.

Ausgehend von $x_o = 3$ erreicht EV1 den wert $x^* = 0$ (mit 10 Stellen Genauigkeit) in 16 Iterationen, während EV2 hierzu 21 Schritte benötigt.

Es zeigen sich anhand des gegebenen simplen Beispiels die wesentlichen Eigenschaften von EV1 bzw. EV2 bezüglich der Ausführung:

EV1 ist erheblich weniger rechenintensiv (bei der Schrittweitensteuerung) und arbeitet im allgemeinen mit größeren Schrittweiten als EV2. Seine Ausführbarkeit ist aber unter Umständen empfindlich abhängig von der Größe von c, weil die Regularität von H auf $M(H,x_o,c)$ erforderlich ist.

EV2 ist sehr arbeitsaufwendig in der Schrittweitenbestimmung, da eventuell stark nichtlineare Ungleichungen zu lösen sind. Dafür ist aber die Konvergenz unter schwächeren Voraussetzungen (Regularität nur längs der Lösung erforderlich) gewährleistet.

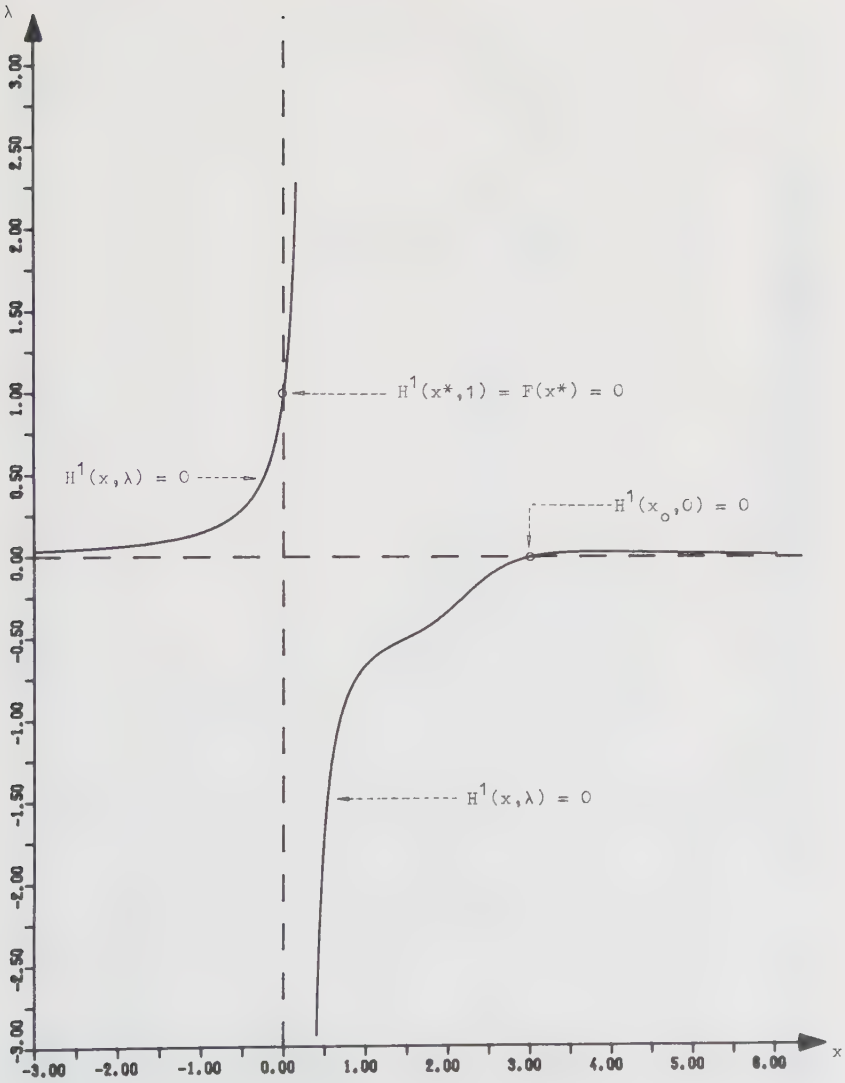
Basierend auf dem einfachen Beispiel läßt sich das folgende, auch durch andere Anwendungen bestätigte Fazit ziehen:

Liegt eine gegebene Gleichung $F(x) = 0$ vor, über deren Eigenschaften man keine oder wenig Information besitzt, und will man ausgehend von einem vorgegebenen x_o eine Nullstelle von F iterativ unter Verwendung Newton-ähnlicher Iterationsschritte bestimmen, so empfiehlt sich wegen des ansteigenden Rechenaufwandes nacheinander ein Vorgehen mit den folgenden Verfahren:

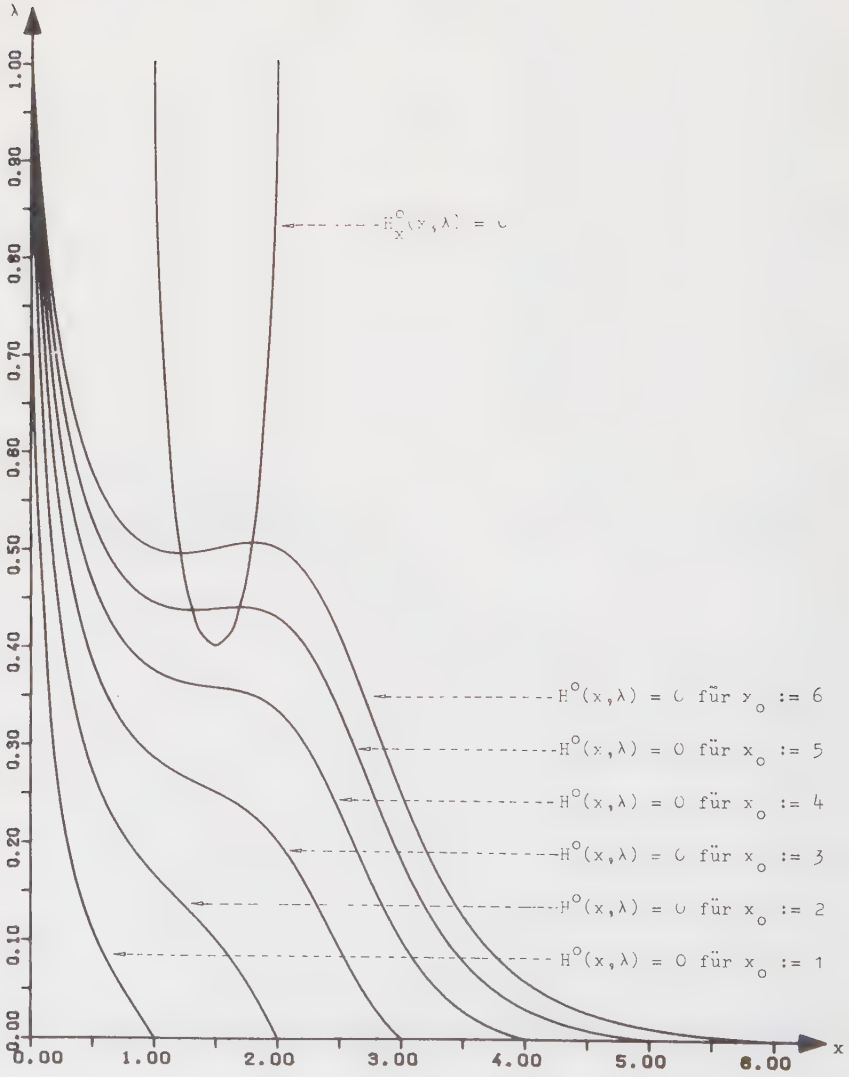
1. Newton-Verfahren
2. EV3 (bzw. EV4, falls die Voraussetzungen von Satz X.10 nachweisbar sind)

3. EV1 (mit sukzessiver Verkleinerung von c im Falle von Divergenz)

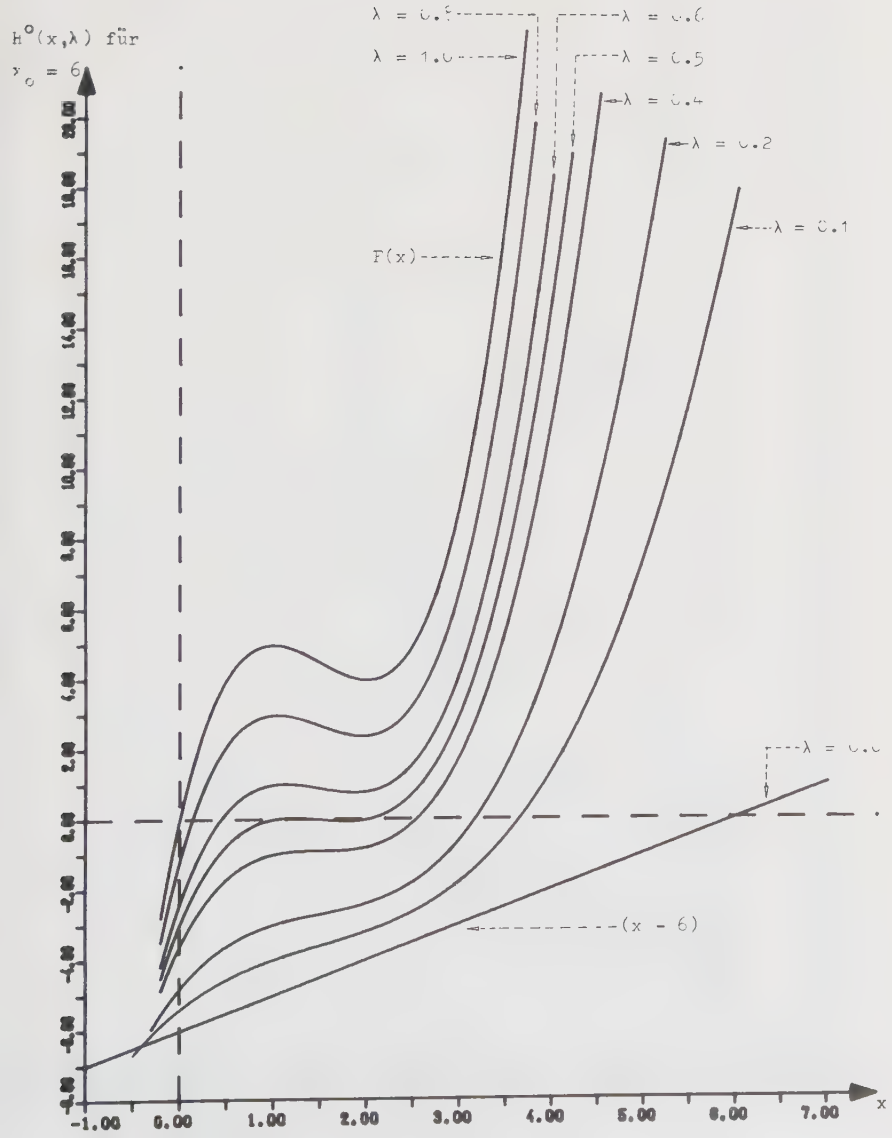
4. EV2.



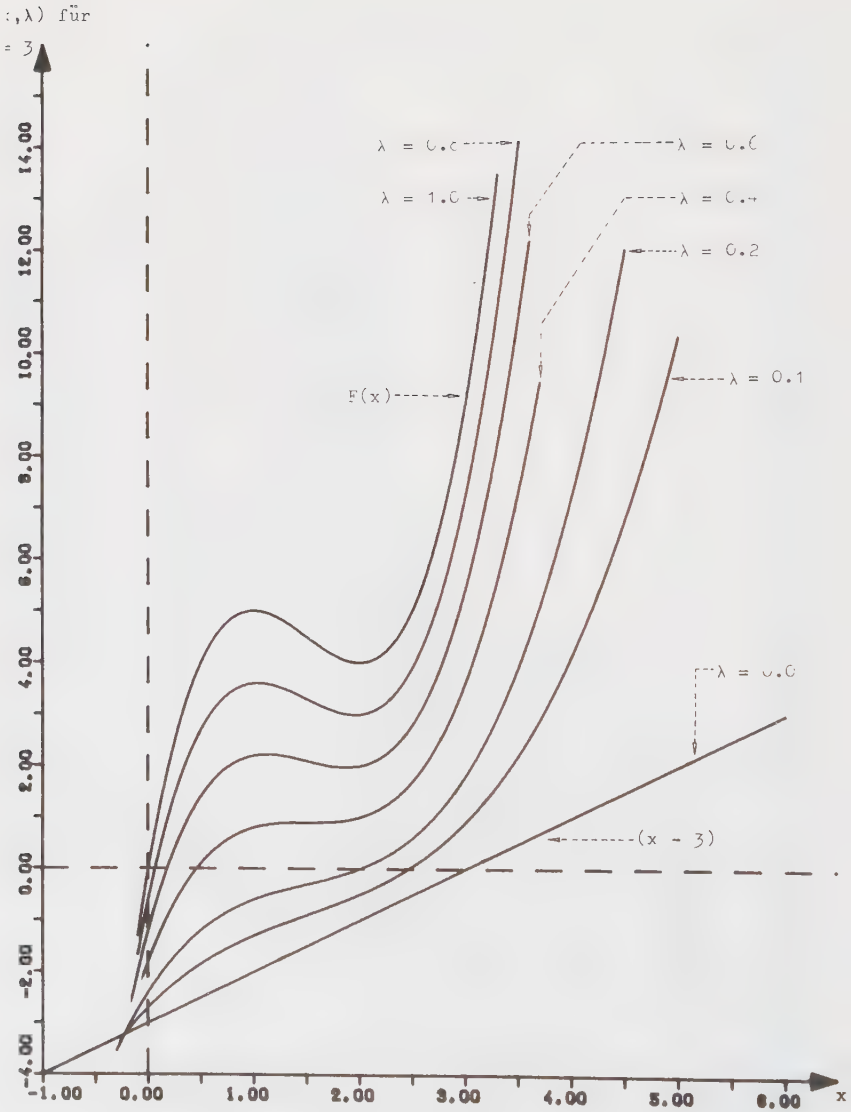
Figur XI.1: Nullstellen der Einbettung H^1 für $x_o := 3$



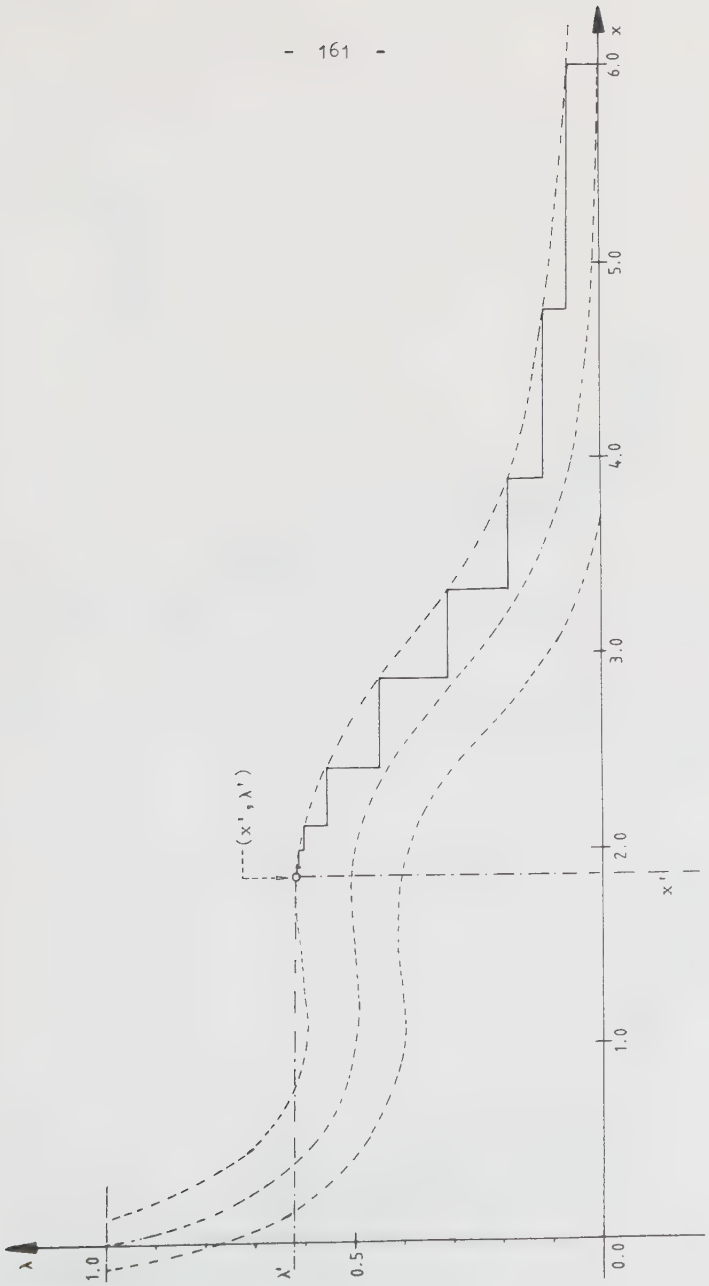
Figur XI.2: Nullstellen der Einbettung H^o für verschiedene Startwerte x_o sowie Singularitäten von H^o_x



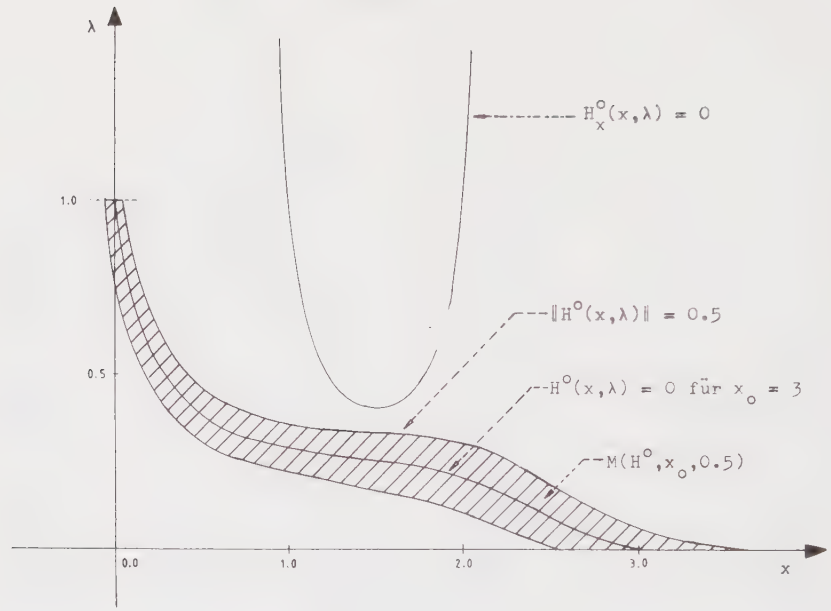
Figur XI.3: Übergang der durch H^{o} erzeugten Homotopiekurven von (x - 6) zu F(x)



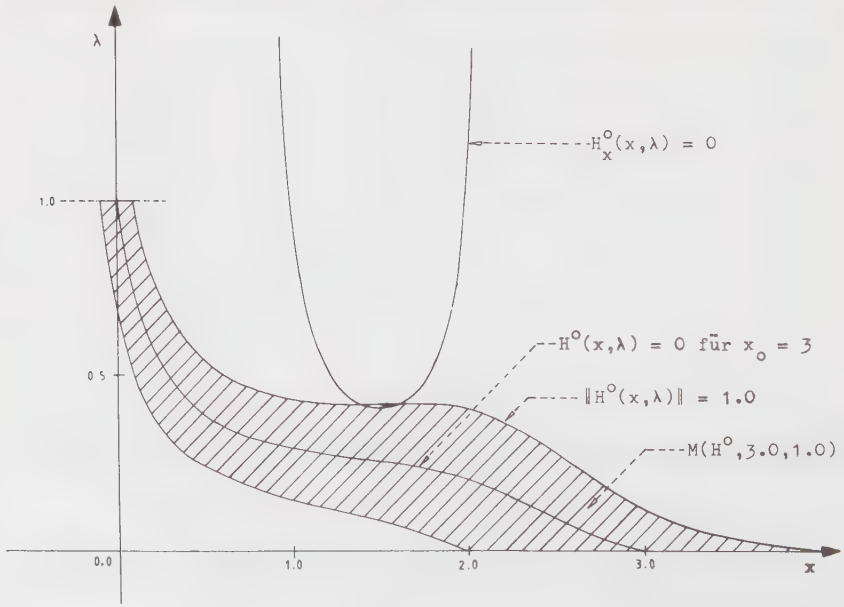
Figur XI.4: Übergang der durch H° erzeugten Homotopiekurven von (x - 3) zu F(x)



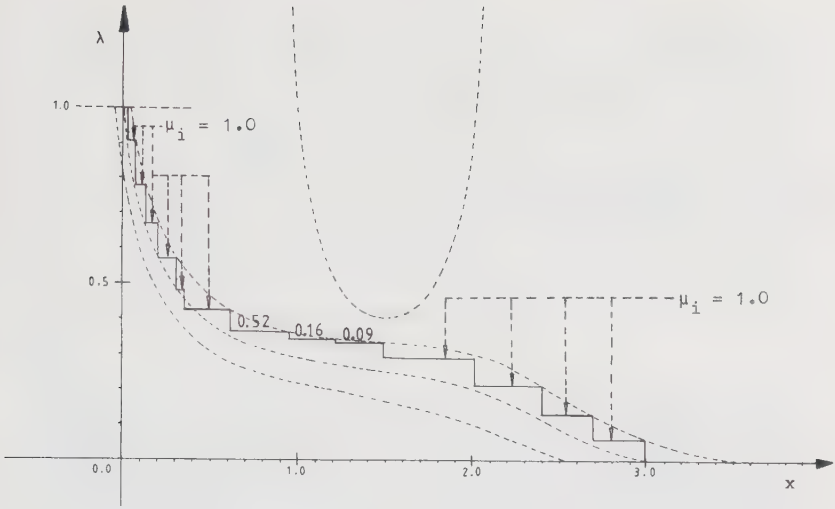
Figur XI.5: Verlauf von EV1 bei Anwendung auf $H^{o}(x,\lambda)$ mit $x_{\circ} = 6$



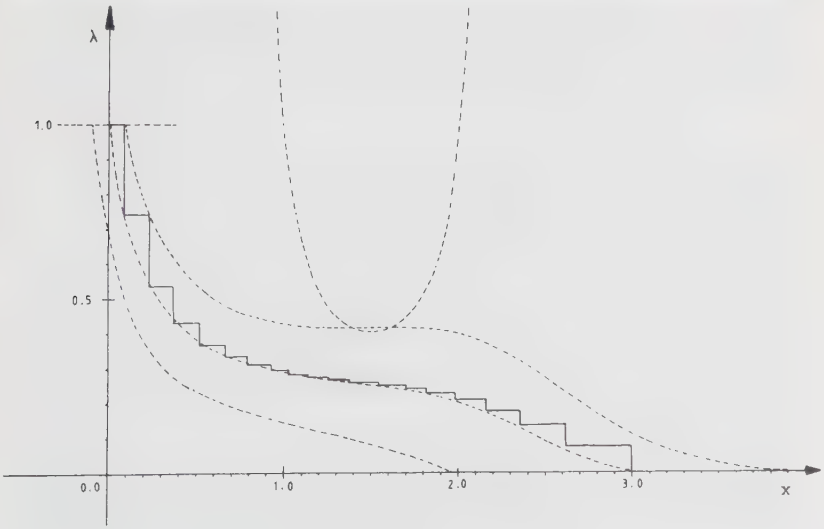
Figur XI.6: Regularität von H^o auf $M(H^o,3.0,0.5)$ erfüllt



Figur XI.7: Regularität von H^o auf $M(H^o,3.0,1.0)$ nicht erfüllt



Figur XI.8: Iterationsschritte von EV1 mit Angabe der Dämpfungsfaktoren μ_i für $H^o(x,\lambda)$ nach (11.1) mit $x_o = 3$



Figur XI.9: Iterationsschritte von EV2 für $H^o(x,\lambda)$ nach (11.1) mit $x_o = 3$

XII. BEISPIELE

XII.1 Ein nichtlineares Gleichungssystem

Betrachtet sei die Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vermöge

(12.1) $\forall\, x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ \\ F_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,(\sin \xi_1\, \xi_2 - \xi_1 - \frac{1}{2\pi}\,\xi_2) \\ \\ e\,((1 - \frac{1}{4\pi})\,(e^{2\xi_1 - 1} - 1) - 2\,\xi_1 + \frac{1}{\pi}\,\xi_2) \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung eignet sich besonders gut zum Test von Einbettungsverfahren, denn sie ist hinreichend nichtlinear und bietet genügend viele Nullstellen wie auch lokale Extrema. In Figur XII.1 sind alle zwölf Nullstellen von F skizziert und ihrem Wert nach angegeben. Wegen der Vielzahl von Nullstellen sowie wegen der vorhandenen Extrema ist der Erfolg oder Mißerfolg für ein lokales Verfahren zur Nullstellenbestimmung weitgehend von der zufälligen Wahl einer mehr oder minder geeigneten Anfangsnäherung abhängig, und es bietet sich grundsätzlich die Anwendung von Einbettungsverfahren an. Die Abbildung (12.1) wird deshalb auch von vielen Autoren, wie etwa BOGGS [6], LEDER [35], RHEINBOLDT [45], DEN HEIJER [11], GRIFKA [25] zur Demonstration der Wirkungsweise ihrer jeweiligen Iterationsverfahren herangezogen.

Wendet man das Newton-Verfahren auf die Funktion F an, so weiß man, daß dieses jeweils für Startwerte aus einer genügend kleinen Umgebung einer Nullstelle gegen diese konvergiert. Für Startwerte außerhalb dieser Umgebungen ist das Ergebnis der Iteration unvorhersehbar. Entweder gerät das Verfahren nach mehr oder minder vielen Iterationen zufällig in den Anziehungsbereich einer Nullstelle, oder aber die Iteration führt in Bereiche, in denen bei der numerischen Ausführung ein Abbruch der Iteration wegen Exponentenüberlaufs notwendig wird.

Unter Kenntnis der Nullstellen bzw. ihrer ungefähren Lage ist es sicher möglich, durch entsprechende Einbettungsansätze den letztgenannten Effekt zu vermeiden und das Iterationsverfahren ausgehend von einer gegebenen Startnäherung in den Anziehungsbereich einer

bestimmten Nullstelle zu leiten. So ist es nicht verwunderlich, daß mit verschiedenen Einbettungsfunktionen durch die Verfahren der oben angeführten Autoren ausgehend vom gleichen Startwert Konvergenz gegen unterschiedliche Nullstellen erzeugt wird.

Ausgehend von der ursprünglichen Problemstellung und ohne Kenntnisse über die Nullstellen ist die Auswahl geeigneter Einbettungsfunktionen zu vorgegebenen Startwerten jedoch unter Umständen ebenso zufällig, wie das Ergebnis bei der Anwendung des Newton-Verfahrens selbst, denn erst nach Durchführung des Verfahrens erweist sich die Eignung der gewählten Einbettungsfunktion.

Dagegen kann man bezüglich der Anwendung von EV3 für F sagen, daß durch dieses Verfahren in jedem Falle die Anziehungsgebiete um die Nullstellen erweitert werden, so daß durch EV3 prinzipiell für eine größere Menge von Startvektoren Konvergenz zu einer Nullstelle erzeugt wird. Das gilt insbesondere auch für Startvektoren in der Nähe von lokalen Extrema, bei denen die Norm der Inversen der Fréchet-Ableitung sehr groß ist. Hier führt die volle Newton-Korrektur $\Delta x_o = F'^{-1}(x_o)\, F(x_o)$ sehr weit von der Startnäherung weg und erzeugt dadurch gegebenenfalls in einem der nächsten Schritte Exponentenüberlauf, während EV3 durch geeignete Dämpfung die Korrektur so verkleinert, daß auf der Verbindungsstrecke zwischen den Iterierten eine stetige Normreduktion gesichert ist.

Für die Anwendung von EV3 ist bei Wahl von d = 0 jeweils die Inverse von

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,(\xi_2 \cos \xi_1 \xi_2 - 1) & \frac{1}{2}\,(\xi_1 \cos \xi_1 \xi_2 - \frac{1}{2\pi}) \\ 2\,(1 - \frac{1}{4\pi})\, e^{2\xi_1} - 2\,e & \frac{e}{\pi} \end{pmatrix}$$

an der Stelle x_i zu ermitteln.

Wegen der zweifachen stetigen Fréchet-Differenzierbarkeit von F kann gemäß Bemerkung X.4 auf der Niveaumenge $M(F,x_o)$ ferner die Lipschitzfunktion

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^2, \quad \forall\, \mu \in [0,1]:$$

$$K3(x,y,\mu) := \sup \{ \|F''(x + t\,y)\| \mid t \in [0,\mu],\ (x + t\,y) \in M(F,x_o) \}$$

verwendet werden. Dabei gilt bezüglich F'':

$$\frac{\partial^2 F_1(x)}{\partial^2 \xi_1} = -\frac{1}{2}\xi_2^2 \sin \xi_1 \xi_2$$

$$\frac{\partial^2 F_1(x)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = \frac{\partial^2 F_1(x)}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} = -\frac{1}{2}(\xi_1 \xi_2 \sin \xi_1 \xi_2 - \cos \xi_1 \xi_2)$$

$$\frac{\partial^2 F_1(x)}{\partial^2 \xi_2} = -\frac{1}{2}\xi_1^2 \sin \xi_1 \xi_2$$

$$\frac{\partial^2 F_2(x)}{\partial^2 \xi_1} = 4\,(1 - \frac{1}{4\pi})\, e^{2\xi_1}$$

$$\frac{\partial^2 F_2(x)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = \frac{\partial^2 F_2(x)}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} = \frac{\partial^2 F_2(x)}{\partial^2 \xi_2} = 0\ .$$

Bei Verwendung der Maximumnorm erhält man deshalb

$$\|F''(x)\|_\infty \leq \max \{ \tfrac{1}{2} (\xi_2^2 |\sin\xi_1\xi_2| + 2 |\xi_1\xi_2 \sin \xi_1\xi_2| + 2 |\cos \xi_1\xi_2| + \xi_1^2 |\sin \xi_1\xi_2|),\ (4 - \tfrac{1}{\pi})\, e^{2\xi_1} \}$$

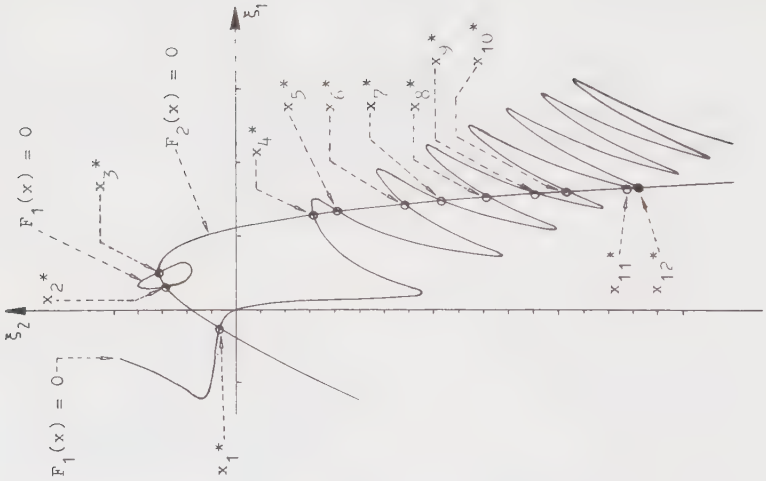
$$\leq \max \{ \tfrac{1}{2} (2 + (|\xi_1| + |\xi_2|)^2),\ (4 - \tfrac{1}{\pi})\, e^{2\xi_1} \}\ .$$

Benutzt man dies für EV3 und wählt zudem $q := 0.95$ und $\rho := 0.5$, so stellt man fest, daß mit EV3 für eine Vielzahl von Startwerten noch Konvergenz (gegen die im Sinne der Abstiegsrichtung nächstliegende Nullstelle) erzeugt wird, bei denen das Newton-Verfahren versagt. Als Beispiel hierfür seien die in folgender Tabelle angeführten Startwerte angegeben:

Startwert		Konvergenz mit EV3 gegen:	Anzahl der Iterationsschritte bis zur Lösung
ξ_1	ξ_2		
0.2	0.5	x_1^*	11
0.1	1.5	x_2^*	26
0.5	1.0	x_2^*	38
0.6	1.0	x_3^*	57
0.4	0.5	x_3^*	75

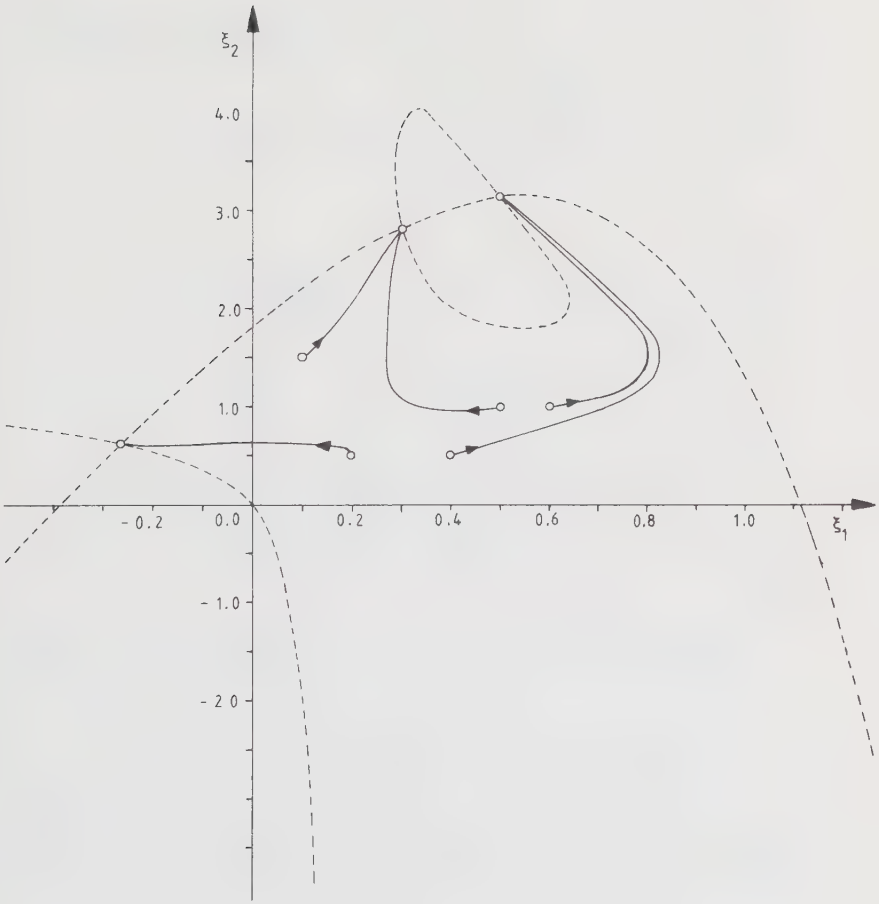
Der Verlauf des mit EV3 zurückgelegten Iterationsweges ist für die obigen Startwerte in Figur XII.2 skizziert.

Anhand der angegebenen Startwerte erweist sich EV3 als natürliche und naheliegende Möglichkeit zur Vergrößerung des Konvergenzbereiches um die Nullstellen, wenn das Newton-Verfahren versagt.



$$x_1^* \doteq (-0.26059\ 92900\ 22476\ ,\ \ 0.62253\ 08966\ 13911\ )$$
$$x_2^* \doteq (\ 0.29944\ 86924\ 90926\ ,\ \ 2.83692\ 77704\ 58940\ )$$
$$x_3^* \doteq (\ 0.50000\ 00000\ 00000\ ,\ \ 3.14159\ 26535\ 89793\ )$$
$$x_4^* \doteq (\ 1.29436\ 04599\ 20630\ ,\ -3.13721\ 97911\ 92911\ )$$
$$x_5^* \doteq (\ 1.33742\ 56119\ 89260\ ,\ -4.14043\ 86468\ 27950\ )$$
$$x_6^* \doteq (\ 1.43394\ 93299\ 30748\ ,\ -6.82076\ 52663\ 41005\ )$$
$$x_7^* \doteq (\ 1.48131\ 95681\ 31123\ ,\ -8.38361\ 26856\ 19592\ )$$
$$x_8^* \doteq (\ 1.53050\ 53237\ 20723\ ,\ -10.20224\ 79489\ 59246\ )$$
$$x_9^* \doteq (\ 1.57822\ 53992\ 13536\ ,\ -12.17668\ 98507\ 05653\ )$$
$$x_{10}^* \doteq (\ 1.60457\ 05468\ 49489\ ,\ -13.36290\ 16779\ 98672\ )$$
$$x_{11}^* \doteq (\ 1.65458\ 27187\ 64350\ ,\ -15.81918\ 82321\ 71341\ )$$
$$x_{12}^* \doteq (\ 1.66342\ 19813\ 30833\ ,\ -16.28279\ 06501\ 32464\ )$$

Figur XII.1: Nullstellen der Funktion F aus (12.1)



Figur XII.2: Iterationsverlauf von EV3 bei der Lösung von Gleichung (12.1) für verschiedene Startwerte

XII.2 Nichtlineare Integralgleichungen

XII.2.1

Zu $\lambda \in \mathbb{R}$ und $r \in C[0,1]$ sei auf dem Banachraum $(C[0,1], \| \|_\infty)$ die folgende Integralgleichung betrachtet:

(12.2) $\forall\, x \in C[0,1],\ \forall\, s \in [0,1]$:

$$[F(x)](s) := x(s) - \lambda\, [K(x)](s) - r(s) = 0 \quad \text{mit}$$

$$[K(x)](s) := \int_0^1 s\, t\, \operatorname{atan}(x(t))\, dt\ .$$

Für beliebiges $x_0, x, y \in C[0,1]$ gilt diesbezüglich

$$[F'(x_0)\, x](s) = [I - \lambda\, K'(x_0)]\, (x(s)) \qquad \text{mit}$$

$$[K'(x_0)]\, (x(s)) = \int_0^1 s\, t\, \frac{1}{1 + x_0^2(t)}\, x(t)\, dt \qquad \text{und}$$

$$[F''(x_0)\, x\, y]\, (s) = -\lambda\, [K''(x_0)\, x\, y]\, (s) \qquad \text{mit}$$

$$[K''(x_0)\, x\, y]\, (s) = \int_0^1 s\, t\, \frac{-2\, x_0(t)}{(1 + x_0^2(t))^2}\, x(t)\, y(t)\, dt\ .$$

Wegen

$$\forall\, s \in [0,1]: \quad |[K'(x_0)\, x](s)| = \left| s \int_0^1 t\, \frac{1}{1 + x_0^2(t)}\, x(t)\, dt \right|$$

$$\leq \left| s \int_0^1 t\, \|x\|_\infty\, dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 t\, dt\, \|x\|_\infty = \frac{1}{2}\, \|x\|_\infty\ ,$$

gilt $\|K'(x_0)\|_\infty \leq \frac{1}{2}$, so daß gemäß Banach-Lemma (siehe Hilfssatz IV.17) für $|\lambda| < 2$ die konjare Inverse von $F'(x_0)$ existiert mit

(12.3) $$\|F'^{-1}(x_0)\| \leq \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2}} = \frac{2}{2 - \lambda}\ .$$

Untersucht man ferner die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vermöge

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad g(x) := \frac{2x}{(1 + x^2)^2}$$

in bezug auf ihre Betragsmaxima, so stellt man fest, daß sie bei $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ein absolutes Maximum mit $|g(\frac{1}{\sqrt{3}})| = \frac{\sqrt{27}}{8}$ und bei $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ein absolutes Minimum mit $|g(-\frac{1}{\sqrt{3}})| = \frac{\sqrt{27}}{8}$ besitzt. Also gilt stets $|g(x)| \leq \frac{\sqrt{27}}{8}$ und man erhält:

$$\forall\, s \in [0,1]: \quad |[K''(x_0)\, x\, y](s)| \leq |s \frac{\sqrt{27}}{8}\, \|x\|_\infty\, \|y\|_\infty \int_0^1 t\, dt|$$

$$\leq \frac{\sqrt{27}}{16}\, \|x\|_\infty\, \|y\|_\infty .$$

Folglich ist für jedes $x_0 \in C[0,1]$:

$$\|F''(x_0)\|_\infty \leq \lambda \frac{\sqrt{27}}{16} . \tag{12.4}$$

Für $|\lambda| < 2$ und beliebiges $\bar{x} \in C[0,1]$ gilt damit bezüglich F:

(V1) $M(F,\bar{x})$ ist abgeschlossen, da $D = X = C[0,1]$

(V2) F ist auf $M(\Gamma,\bar{x})$ regulär, da F auf ganz $C[0,1]$ regulär ist, mit der Regularitätskonstanten $\beta = \frac{2}{2-\lambda}$ nach (12.3)

(V3) F' erfüllt die Lipschitzbedingung $L3(M(F,\bar{x}))$ gemäß Bemerkung X.4 mit der Lipschitzkonstanten $\kappa = \lambda \frac{\sqrt{27}}{16}$ nach (12.4).

Zufolge von Satz X.6 ist deshalb das Einbettungsverfahren EV3 für jedes $x_0 \in C[0,1]$ ausführbar, wenn die Lipschitzfunktion K3 gemäß (10.8) verwendet wird.

Wegen der global gültigen Konstanten β und κ kann in EV3 für $d = 0$ die durch (9.6) definierte Funktion $\eta_i(\mu)$ stets abgeschätzt werden durch:

$$\eta_i(\mu) = \mu\, K3(x_i, \Delta x_i, \mu)\, \|\Gamma_i\|\, \|\Delta x_i\|$$

$$\leq \mu \kappa \beta^2\, \|F(x_i)\| \leq \mu \kappa \beta^2\, \|F(x_0)\| .$$

Falls deshalb

$$\|F(x_0)\| < \frac{2}{\kappa \beta^2} , \tag{12.5}$$

so kann durch geeignete Wahl von q und ρ erzwungen werden, daß in EV3 stets $\mu_i = 1$ gewählt wird. Hierzu muß ρ und q so gewählt werden, daß

$\varkappa \beta \|F(x_0)\| < 2 \varrho q$ gilt und folglich (9.8) für $\mu_i < 1$ nicht erfüllt werden kann.

Somit sichert Satz X.6 auch die Konvergenz des Newton-Verfahrens für den Startwert x_0 ab, wenn hierfür (12.5) gültig ist.

Für den Fall $\lambda = 1$ wird die Integralgleichung (12.2) mit

$r(s) := 1 - a\,s + s^2$ und $a := \int_0^1 t \operatorname{atan}(1 + t^2)\,dt \doteq 0.485377$

von GOLDSTEIN (siehe [24], Seite 160 ff) und MÖRSEL (siehe [41]) untersucht.

GOLDSTEIN weist mit Hilfe von Abschätzungen über den lösenden Kern nach, daß für $x_0(t) \equiv \frac{3}{2}$ die Konvergenzvoraussetzungen eines Satzes von Newton - Kantorowitsch erfüllt sind. Dabei wird für die Abschätzung von $F''(x_0)$ statt der gültigen Schranke $\varkappa = \frac{\sqrt{27}}{16}$ fälschlicherweise die zu kleine Konstante $\frac{1}{6}$ verwendet, jedoch bleiben die Voraussetzungen des Newton - Kantorowitsch Satzes auch noch erfüllt, wenn man diesen Fehler korrigiert.

Da sich für $\lambda = 1$ die Konstanten $\varkappa = \frac{\sqrt{27}}{16}$ und $\beta = 2$ ergeben, ist die Konvergenzaussage für das Newton-Verfahren auch mit Hilfe von Satz X.6 zu erzielen, wenn gemäß (12.5)

$$\|F(x_0)\| < \frac{2 \cdot 16}{\sqrt{27} \cdot 4} = \frac{8}{\sqrt{27}} .$$

Nun gilt:

$$[F(x_0)](s) = \tfrac{3}{2} - 1 + a\,s - s^2 - \int_0^1 s\,t \operatorname{atan} \tfrac{3}{2}\,dt$$

$$= \tfrac{1}{2} + (a - \tfrac{1}{2} \operatorname{atan} \tfrac{3}{2})\,s - s^2$$

$$= \tfrac{1}{2} + b\,s - s^2 \quad \text{mit } b = a - \tfrac{1}{2} \operatorname{atan} \tfrac{3}{2} \doteq 0.0195788 .$$

$[F(x_0)](s)$ besitzt ein lokales Maximum bei $s = \frac{b}{2}$ mit

$$[F(x_0)](\tfrac{b}{2}) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{b^2}{4} .$$

Wegen $[F(x_0)](0) = \frac{1}{2}$ und $[F(x_0)](1) = -\frac{1}{2} + b$ folgt daher

$$\|F(x_0)\| = \tfrac{1}{2} + \tfrac{b^2}{4} \doteq 0.50009583 < \frac{8}{\sqrt{27}} \doteq 1.5396 .$$

MÖRBEL beweist die Konvergenz des Newton-Verfahrens mit Hilfe eines Satzes von Newton - Mysowskich für den Startwert $x_o(s) := 1 - 0.4\ s + s^2$ und basierend auf einem Satz von Newton - Kantorowitsch für den Startwert $x_o(s) := 1 - 0.3\ s + s^2$. Ferner sind für den letzteren Startwert auch die Konvergenzvoraussetzungen für ein von MÖRBEL vorgeschlagenes Mehrpunktverfahren erfüllt.

Für die obigen Startwerte läßt sich die Konvergenz des Newton-Verfahrens ebenfalls mit Satz X.6 nachweisen, da auch hier

$$|[F(x_o)](s)| \leq (a - 0.3)\ s + \int_0^1 s\ t\ |\operatorname{atan} x_o(t)|\ dt$$

$$\leq (a - 0.3) + \frac{\pi}{4} \doteq 0.970775 < \frac{8}{\sqrt{27}} \doteq 1.5396\ ,$$

so daß bei geeigneter Wahl von ϱ und q EV3 mit dem Newton-Verfahren identisch ist.

Die von GOLDSTEIN und MÖRBEL verwendeten Startwerte liegen relativ nahe an der Lösung $x^*(s) = 1 + s^2$, denn es gilt hierfür stets

$$\|x_o - x^*\| \leq \frac{1}{2}\ .$$

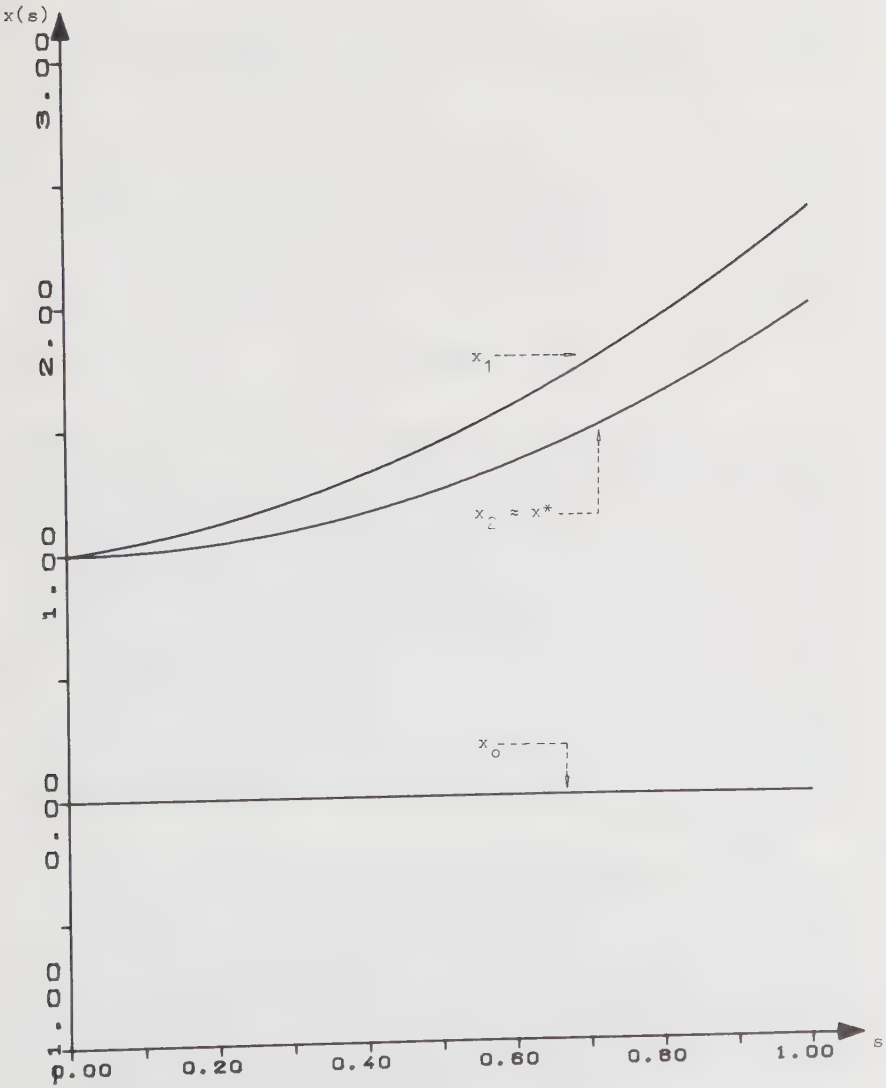
Mit Satz X.6 läßt sich die Konvergenz des dann mit EV3 identischen Newton-Verfahrens aber auch noch für weiter entfernte Startwerte zeigen. So ist z.B. für $x_o \equiv 0$: $\|x_o - x^*\| = 2$ und es gilt

$$\|F(x_o)\| = \|r\| = 2 - a \doteq 1.514623 < 1.5396 \doteq \frac{8}{\sqrt{27}}\ .$$

Bei der Lösung der Integralgleichung (12.2) mit Hilfe von EV3 wurde ein am Lehrstuhl für Angewandte Mathematik an der Universität Düsseldorf entwickeltes Programm verwendet, in dem die bei jeder Iteration entstehenden linearen Integralgleichungen durch Gauß-Quadratur mit 32 Stützstellen (vergl. ABRAMOWITZ - STEGUN [1]) approximativ gelöst werden. Dabei bleibt der durch Anwendung der Gauß-Quadratur in jeder Iteration entstehende Fehler unberücksichtigt. Da jedoch durch die Gauß-Quadraturformel mit 32 Stützstellen Polynome bis zum 63 - ten Grade exakt integriert werden, muß die unter Verwendung der Gauß-Quadratur ermittelte Lösung der Integralgleichung im Rahmen der Iterationsgenauigkeit mit der exakten Lösung übereinstimmen, falls diese aus einem Polynom bis zum oben genannten Grade besteht. Bei

der vorliegenden Integralgleichung ist das wegen $x^*(s) = 1 + s^2$ der Fall.

In Figur XII.3 sind ausgehend vom Startwert $x_0 \equiv 0$ die Iterierten von IV3 bei Verwendung von $\varrho = 0.999$ und $q = 0.999$ skizziert. Man sieht, daß x^* im Rahmen der Zeichengenauigkeit ($\approx 10^{-2}$) bereits mit x_2 erreicht ist. Nach 6 Iterationen ist die Lösung im Rahmen der vorgegebenen Stellenzahl (auf 16 Stellen) exakt ermittelt.



Figur XII.3: Lösung von Integralgleichung (12.2) mit EV3

XII.2.2

Auf dem Banachraum $(C[0,1], \| \|_\infty)$ sei die Integralgleichung

(12.6) $\forall\, s \in [0,1]$:

$$[\Gamma(x)](s) := x(s) - (1 + s)\, e^{1+s-x(s)} - \frac{e^2 - 1}{4} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x(t)+t-1}\, dt = 0$$

betrachtet. Diese Integralgleichung wird von WACKER in [52] (siehe Beispiel 1 auf Seite 289) mit Hilfe der Einbettung

(12.7) $\forall\, \lambda \in [0,1]\ \forall\, s \in [0,1]$:

$$H(x,\lambda)(s) := x(s) - \lambda\left[(1 + s)\, e^{1+s-x(s)} - \frac{e^2 - 1}{4}\right] + \frac{1}{2} \int_0^\lambda e^{x(t)+t-1}\, dt = 0$$

behandelt. Ausgehend von $x_0 \equiv 0$ als Lösung zu $\lambda = 0$ wird die Gleichung (12.7) jeweils für $\lambda_i = \frac{i}{10}$ $(1 \le i \le 10)$ mit dem Newton-Verfahren näherungsweise gelöst, wobei jeweils die Lösung der vorangegangenen Stufe als Startnäherung verwendet wird. WACKER gibt keine Erklärung über die Wahl der λ_i und es sind auch keine theoretischen Konvergenzaussagen über das Einbettungsverfahren gemacht. Als Begründung für die Vorgehensweise wird lediglich angeführt, das Newton-Verfahren sei für den Startwert $x_0 \equiv 0$ divergent. Diese Aussage ist aber falsch, wie man Figur XII.4 entnehmen kann, in der die ersten vier Iterierten des Newton-Verfahrens skizziert sind. Die vierte Iterierte x_4 stimmt mit der exakten Lösung $x^*(s) = 1 + s$ im Rahmen der Zeichengenauigkeit bereits überein, und bei x_6 ist die Approximation durch das Newton-Verfahren auf 10 Stellen genau.

Wie sehr oft beim Newton-Verfahren gelingt es allerdings trotz der Konvergenz nicht, die hinreichenden Voraussetzungen eines Konvergenzsatzes a-priori zu verifizieren. Da dies aber offensichtlich auch für das von WACKER verwendete Einbettungsverfahren nicht möglich ist, stehen sich beide Verfahren aus theoretischer Sicht als gleichwertig gegenüber. Da das Einbettungsverfahren aber einen erheblich höheren numerischen Aufwand erfordert (es sind schon mindestens zehn Newton-Iterationen erforderlich, um überhaupt zum Wert $\lambda = 1$ zu gelangen),

besteht eigentlich keine Notwendigkeit, vom Newton-Verfahren auf das von WACKER vorgeschlagene Einbettungsverfahren überzugehen.

Anders ist es dagegen, wenn man EV3 für die Gleichung (12.6) betrachtet, denn hierfür läßt sich mit Satz X.6 zu jedem Startwert x_o aus $C[0,1]$ die Ausführbarkeit nachweisen.

Da der Operator F auf ganz $C[0,1]$ definiert und dort zweimal stetig Fréchet-differenzierbar ist, ergibt sich einerseits für beliebiges x_o die Abgeschlossenheit von $M(F,x_o)$ und damit (V1) von Satz X.6, und es kann ferner die Lipschitzfunktion K3 gemäß (10.8) von Bemerkung X.4 verwendet werden, wenn $\|F''(x)\|$ für $x \in M(F,x_o)$ beschränkt ist (vergl. (10.7)).

Also bleibt für $x_o \in C[0,1]$ zu zeigen:

a) F ist auf $M(F,x_o)$ regulär

b) F'' ist auf $M(F,x_o)$ beschränkt.

Für a) ist es hinreichend zu zeigen, daß F auf ganz $C[0,1]$ regulär ist. Zunächst gilt für beliebiges $x \in C[0,1]$:

$\forall\, s \in [0,1]$:

$$[F'(x)\, y](s) = \left[1 + (1+s)\, e^{1+s-x(s)}\right] y(s) + \frac{1}{2} \int_0^1 y(t)\, e^{x(t)+t-1}\, dt\ ,$$

so daß für $r \in C[0,1]$:

$F'(x)\, y = r \iff$

$\forall\, s \in [0,1]$:

$$\left[1 + (1+s)\, e^{1+s-x(s)}\right] y(s) + \frac{1}{2} \int_0^1 y(t)\, e^{x(t)+t-1}\, dt = r(s)$$

$$\iff \forall\, s \in [0,1] : \quad y(s) = \frac{r(s) - c_o}{1 + (1+s)\, e^{1+s-x(s)}}$$

$$\text{mit } c_o = c(x,y) := \frac{1}{2} \int_0^1 y(t)\, e^{x(t)+t-1}\, dt \in \mathbb{R}\ .$$

Durch Einsetzen von y in die Bestimmungsgleichung für c_o erhält man:

$$c_o = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{r(t) - c_o}{1 + (1+t)\, e^{1+t-x(t)}}\, e^{x(t)+t-1}\, dt\ , \text{ so daß}$$

$$c_o = \frac{1}{2} c_1 - \frac{1}{2} c_o c_2 \quad \text{mit} \quad c_1 := \int_o^1 \frac{r(t)\, e^{x(t)+t-1}}{1 + (1+t)\, e^{1+t-x(t)}}\, dt \quad \text{und}$$

$$(12.8) \qquad c_2 := \int_o^1 \frac{e^{x(t)+t-1}}{1 + (1+t)\, e^{1+t-x(t)}}\, dt .$$

Also ergibt sich

$$c_o = \frac{c_1}{2 + c_2} , \quad \text{wobei stets } c_2 > 0 .$$

Damit ist stets $y = F'^{-1}(x)\, r \in C[0,1]$ zu x und r eindeutig bestimmt, und die koniare Invertierbarkeit von F' an jeder Stelle $x \in C[0,1]$ gesichert. Es bleibt noch die Beschränktheit von $F'^{-1}(x)$ auf $M(F,x_o)$ zu zeigen.
Unter Verwendung von c_2 nach (12.8) ergibt sich

$$[F'^{-1}(x)\, r](s) = \frac{1}{1 + (1+s)\, e^{1+s-x(s)}} \left(r(s) - \frac{\int_o^1 \frac{r(t)\, e^{x(t)+t-1}}{1 + (1+t)\, e^{1+t-x(t)}}\, dt}{2 + c_2} \right).$$

Daher folgt

$$\|F'^{-1}(x)\| \le \sup_{s\in[0,1]} \frac{1}{1 + (1+s)\, e^{1+s-x(s)}} \left(1 + \frac{c_2}{2 + c_2}\right) , \quad \text{so daß}$$

$$\|F'^{-1}(x)\| \le \frac{2}{1 + e^{1-\|x\|}} < 2 =: \beta \quad \text{für alle } x \in C[0,1] .$$

Bezüglich b) gilt für alle $x, y, z \in C[0,1]$:

$\forall\, s \in [0,1]$:

$$[F''(x)\, y\, z](s) = \left[(1+s)\, e^{1+s-x(s)}\right] y(s)\, z(s) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_o^1 y(t)\, z(t)\, e^{x(t)+t-1}\, dt ,$$

so daß

$$\|F''(x)\| \le \sup_{s\in[0,1]} (1+s)\, e^{1+s-x(s)} + \frac{1}{2} \int_o^1 e^{x(t)+t-1}\, dt$$

$$\le 2\, e^{2+\|x\|} + \frac{1}{2}\, e^{\|x\|-1}\, (e-1) .$$

Es ist deshalb $\|F''(x)\|$ auf $M(F,x_o)$ beschränkt, wenn $\|x\|$ für $x \in M(F,x_o)$

beschränkt ist.

Sei also $x \in M(F,x_o)$, so daß $\|F(x)\| \leq \|F(x_o)\| =: K_o$.

Dann gilt für alle $s \in [0,1]$:

$$-K_o \leq x(s) - (1+s)\, e^{1+s-x(s)} - \frac{e^2-1}{4} + \frac{1}{2}\int_o^1 e^{x(t)+t-1}\, dt \leq K_o \text{ , bzw.}$$

$$K_1 := -K_o + \frac{e^2-1}{4} \leq x(s) - (1+s)\, e^{1+s-x(s)} + \frac{1}{2}\int_o^1 e^{x(t)+t-1}\, dt$$

$$\leq K_o + \frac{e^2-1}{4} =: K_2 .$$

Für den Fall, daß $x(s) \geq 0$ ergibt sich daraus:

$$x(s) + \frac{1}{2}\int_o^1 e^{x(t)+t-1}\, dt \leq K_2 + (1+s)\, e^{1+s} \leq K_2 + 2\, e^2 =: K_3$$

und wegen $\int_o^1 e^{x(t)+t-1}\, dt > 0$ auch $x(s) < K_3$.

Falls andererseits $x(s) < 0$, so gilt

$$K_1 \leq x(s) - (1+s)\, e^{1+s-x(s)} + \frac{1}{2}\int_o^1 e^{K_3+t-1}\, dt$$

$$= x(s) - (1+s)\, e^{1+s-x(s)} + \frac{e-1}{2e}\, e^{K_3} .$$

Da $(1+s)\, e^{1+s-x(s)} > 0$ folgt hieraus $K_4 := K_1 - \frac{e-1}{2e}\, e^{K_3} < x(s)$.

Wählt man also $K_5 := \max \{ |K_3|, |K_4| \}$, so gilt für $x \in M(F,x_o)$ sicher

$$\|x\| \leq K_5$$

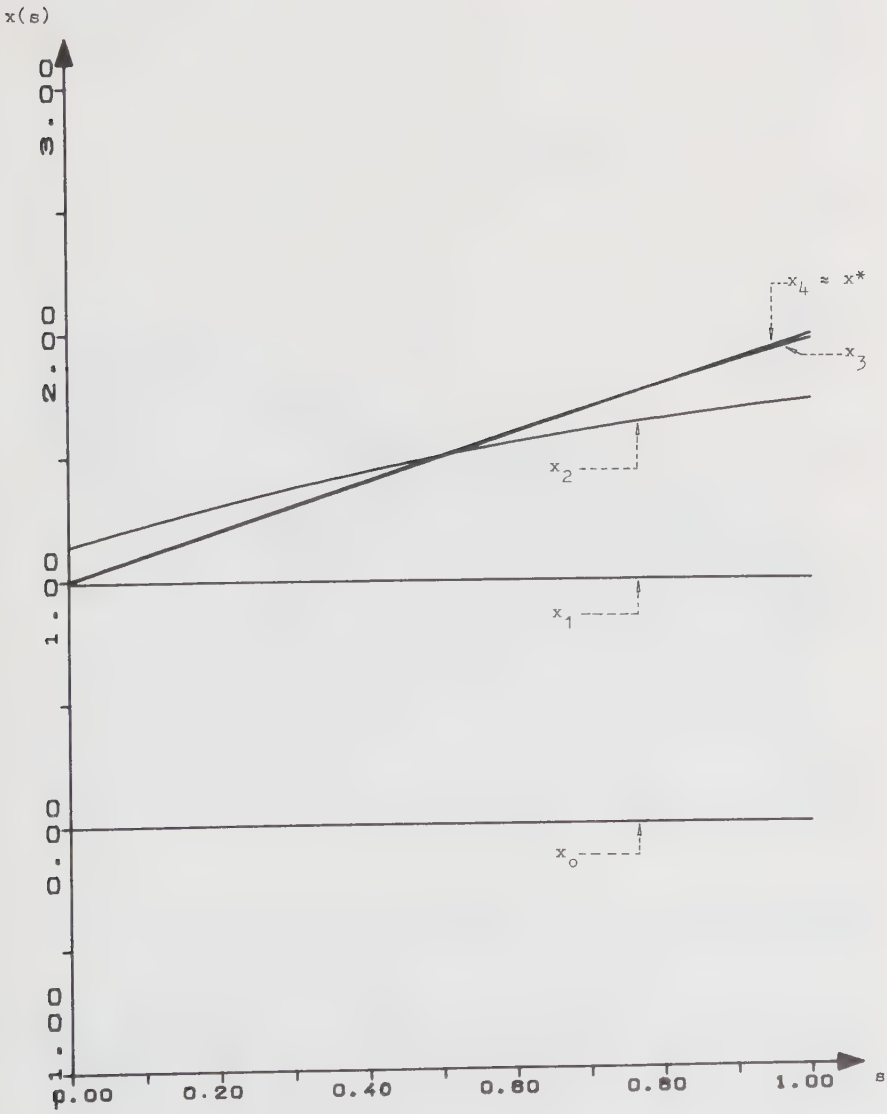
und als Folge davon auch

$$\|F''(x)\| \leq 2\, e^{2+K_5} + \frac{1}{2}\, e^{K_5-1}\, (e-1) =: \kappa .$$

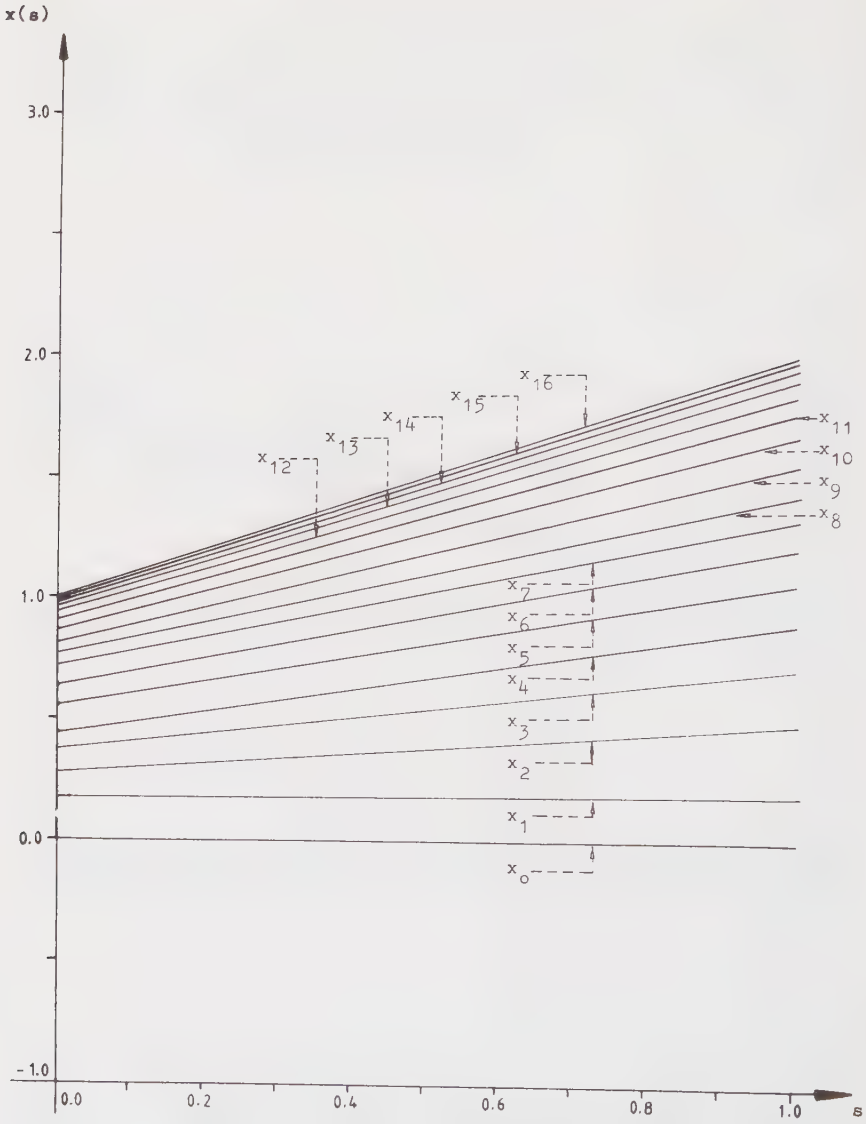
Nach Satz X.6 ist somit EV3 für F mit jedem Startwert $x_o \in C[0,1]$ ausführbar.

In Figur XII.5 sind die Iterierten von EV3 für den Startwert $x_o \equiv 0$ skizziert. Es sind bedingt durch die Dämpfungskoeffizienten naturgemäß mehr Iterationen als beim Newton-Verfahren erforderlich. Nach

16 Iterationen ist die Lösung in Zeichengenauigkeit und nach 20 Iterationen bis auf 10 Stellen genau approximiert. Im Gegensatz zur etwas sprunghaften Iteration durch das Newton-Verfahren wird bei EV3 der stetige Übergang von x_o zur Lösung sichtbar.



Figur XII.4: Lösung der Integralgleichung (12.6) mit dem Newton-Verfahren



Figur XII.5: Lösung von Integralgleichung (12.6) mit EV3

XII.2.3

Mit den auf [0,1] erklärten Funktionen

$$\forall\, s \in [0,1]: \quad g(s) := -\left[5 \ln \frac{27 + s^2}{26 + s^2} - \ln \frac{3 + s^2}{2 + s^2}\right]^{-1} \qquad \text{sowie}$$

$$\forall\, s \in [0,1]: \quad f(s) := 5\, g(s) \ln \frac{(27 + s^2)\,(2 + s^2)}{(26 + s^2)\,(3 + s^2)}$$

sei auf dem Banachraum $(C[0,1], \|\ \|_\infty)$ die Integralgleichung

(12.9) $\forall\, x \in C[0,1],\ \forall\, s \in [0,1]:$

$$[F(x)](s) := x(s) + f(s) + 8\, g(s) \int_0^1 \frac{t\, x(t)}{1 + s^2 + t^2 + x^2(t)}\, dt = 0$$

betrachtet.

Diese unter anderem auch von GRIFKA in [25] untersuchte Integralgleichung besitzt die beiden konstanten Funktionen $x_1^* \equiv 1$ und $x_3^* \equiv 5$ als Lösung, sowie dazwischen eine weitere Lösung x_2^* mit

$\forall\, s \in [0,1]: \quad x_2(s) \in [3.5, 4.3]$.

Es ist somit offensichtlich, daß F' nicht global auf C[0,1] invertierbar sein kann, sondern daß zwischen den Lösungen Singularitäten von F' existieren müssen. Folglich kann weder die Konvergenz des Newton-Verfahrens, noch die von EV3 global abgesichert werden.

Bezüglich des Operators aus (12.9) gilt für alle x, y, z $\in$ C[0,1] und s $\in$ [0,1]:

$$[F'(x)\, y](s) = y(s) + 8\, g(s) \int_0^1 \frac{t\,(1 + s^2 + t^2 - x^2(t))}{(1 + s^2 + t^2 + x^2(t))^2}\, y(t)\, dt \quad \text{und}$$

$$[F''(x)\, y\, z](s) = -\,8\, g(s) \int_0^1 \frac{t\, 2x(t)\,[3(1+s^2+t^2) - x^2(t)]}{(1+s^2+t^2+x^2(t))^2}\, y(t)\, z(t)\, dt.$$

Man kann zwar generell zeigen, daß $\|F''(x)\|$ auf C[0,1] beschränkt ist, aber der Nachweis der Invertierbarkeit von F'(x) bereitet für viele x $\in$ C[0,1] Schwierigkeiten. Für Startnäherungen x_0, die nicht in unmittelbarer Nähe der Lösungen liegen, lassen sich deshalb auch lokale Konvergenzvoraussetzungen für das Newton-Verfahren nicht nachweisen, und bezüglich EV3 ist der Nachweis der Regularität von F auf

$M(F,x_o)$ nicht durchführbar. Man befindet sich somit in einer Situation, wie sie eigentlich fast immer bei Anwendung von Einbettungsverfahren vorliegt: die Operatorgleichung ist hinreichend komplex, und Konvergenzaussagen für das ein oder andere Verfahren lassen sich in Abhängigkeit vom Startwert nicht oder kaum herleiten.

Es bleibt einem daher nur übrig, ein Iterationsverfahren zu starten, ohne die Ausführbarkeit vorher theoretisch nachzuweisen. Führt man für Gleichung (12.9) EV3 sowie das Newton-Verfahren aus, so erkennt man, daß diese Gleichung besonders gut geeignet ist, die charakteristischen Unterschiede in der Iterationsweise der beiden Verfahren unter den gegebenen Voraussetzungen ungesicherter Konvergenz zu veranschaulichen. Es erweist sich nämlich, daß im Falle von Konvergenz EV3 monoton der Abstiegsrichtung folgend zur in dieser Richtung nächstliegenden Nullstelle konvergiert, während die ersten Iterationen des Newton-Verfahrens oft mehr oder minder zufällig den Definitionsbereich überstreichen, bis ein Einzugsbereich für eine Nullstelle erreicht ist.

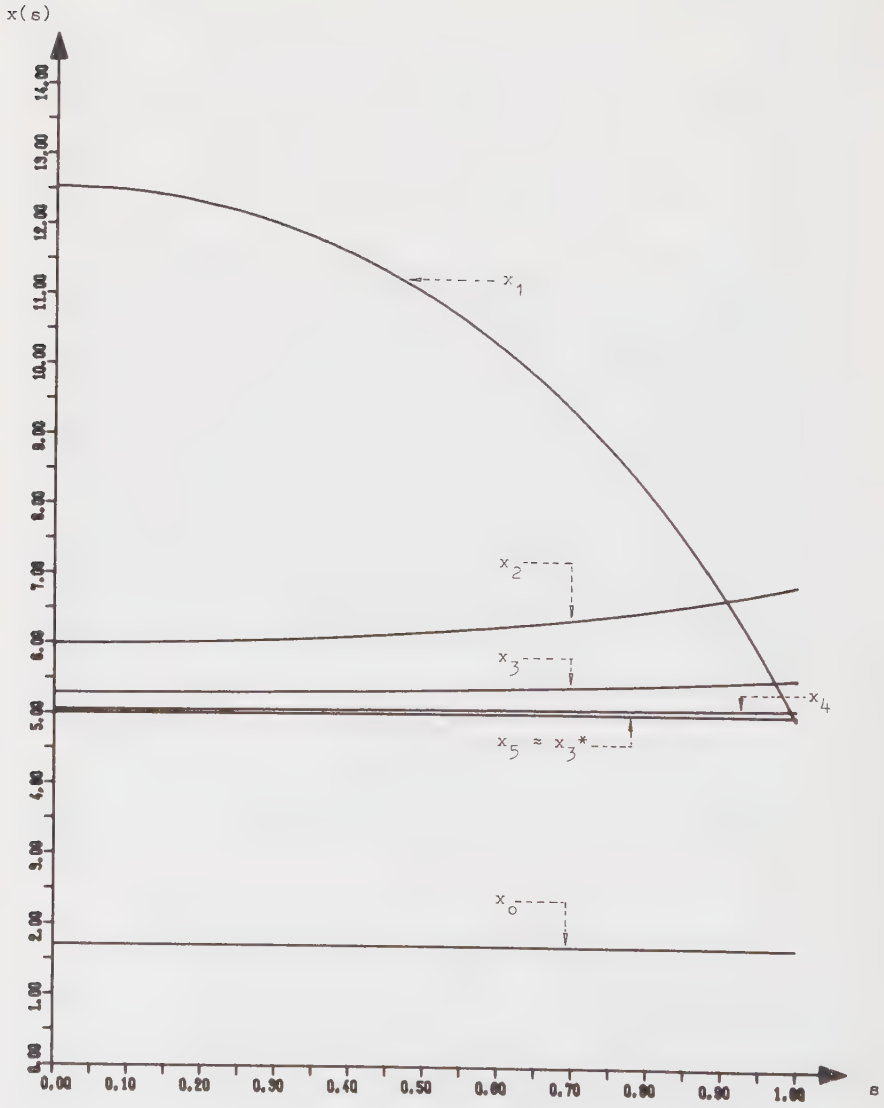
Die Startnäherung $x_o \equiv 1.7$ befindet sich beispielsweise zwischen den Lösungen x_1^* und x_2^*, wobei zwischen x_o und x_1^* eine Singularität von F' liegt. Das Newton-Verfahren springt nun von x_o über die beiden Lösungen x_2^* und x_3^* hinweg zur Iterierten x_1, um von da aus im weiteren die Lösung x_3^* zu approximieren, die im Rahmen der Zeichengenauigkeit mit der fünften Iteration erreicht ist (vergleiche Figur XII.6), und die durch die achte Iterierte auf 16 Stellen genau approximiert wird. Demgegenüber folgt EV3 monoton der Abstiegsrichtung zur Lösung x_2^* und approximiert diese von unten nach 10 Iterationen mit Zeichengenauigkeit und nach 15 Iterationen auf 16 Stellen (siehe Figur XII.7).

Bei der Startnäherung $x_o \equiv 4.4$ ergibt sich ein analoges Iterationsverhalten der beiden Verfahren in umgekehrter Richtung. Das Newton-Verfahren springt über die Lösung x_2^* hinweg in den Einzugsbereich der Lösung x_1^*. Diese Lösung wird nach 5 Iterationsschritten (Zeichengenauigkeit - siehe Figur XII.8) bzw. nach 9 Iterationen (16 Stellen Genauigkeit) erreicht. Figur XII.9 läßt sich entnehmen, daß durch EV3 ausgehend von $x_o \equiv 4.4$ die Lösung x_2^* monoton von oben approximiert wird. Auch hier wird die Lösung x_2^* nach 5 Iterationsschritten auf

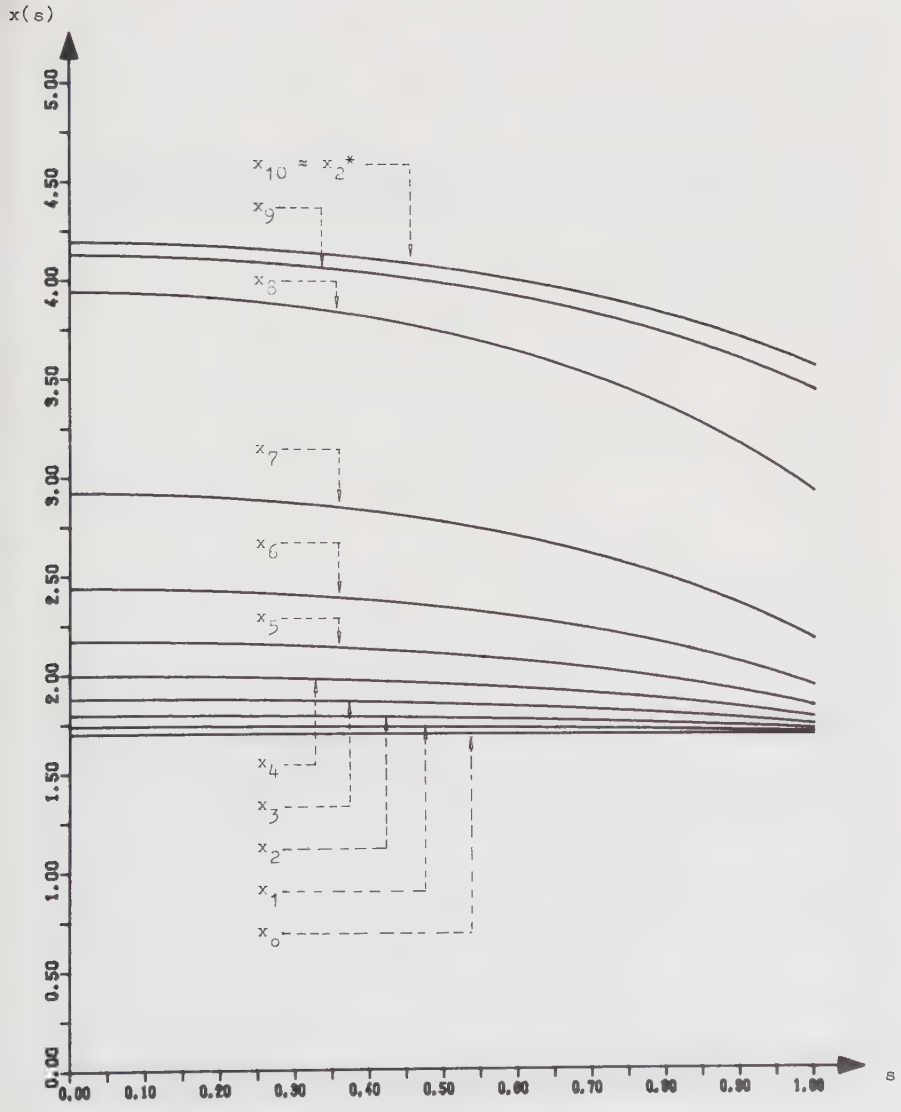
Zeichengenauigkeit und nach 9 Schritten bis auf 16 Stellen genau approximiert.

Verwendet man $x_0 \equiv 4.5$ als Startnäherung, so konvergieren beide Verfahren gegen x_3^*, wobei das Newton-Verfahren wiederum einen größeren Bereich überstreicht als EV3 (siehe Figur XII.10 und XII.11). Mit beiden Verfahren wird x_3^* nach 4 (Zeichengenauigkeit) bzw. 7 Iterationen (16 Stellen Genauigkeit) erreicht.

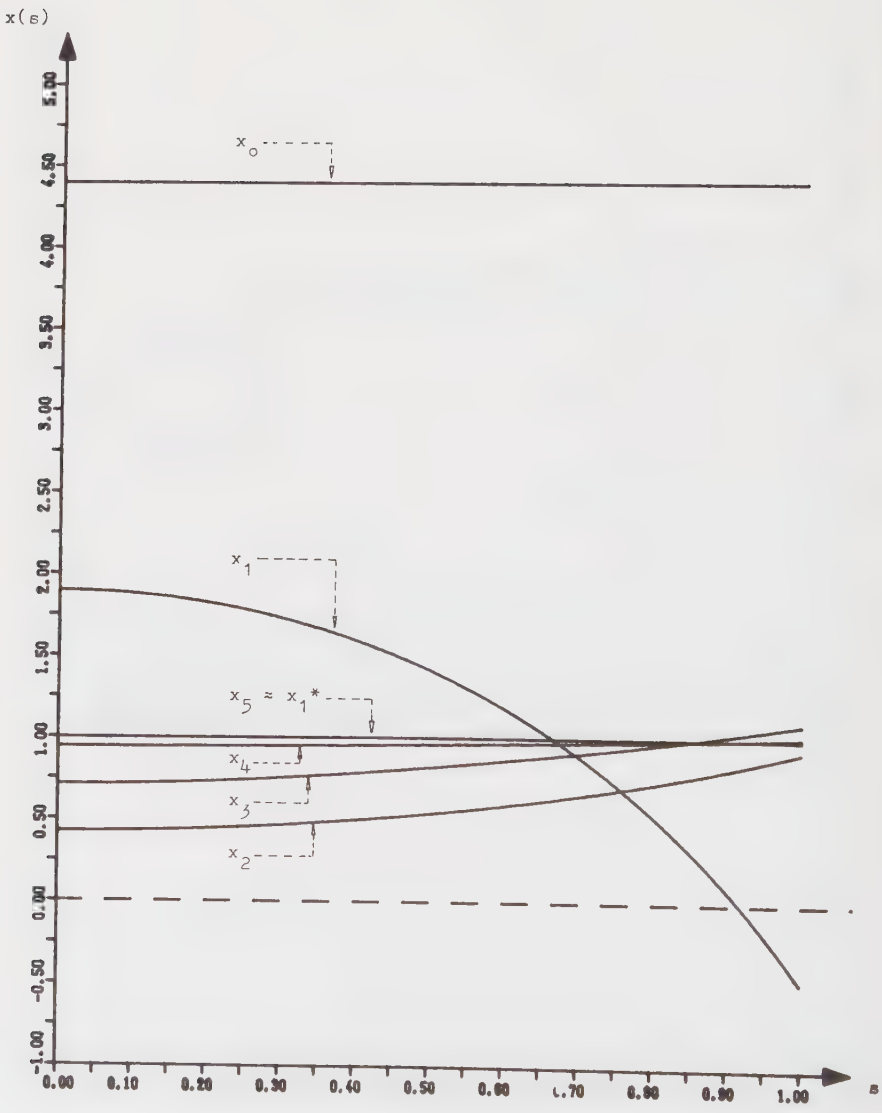
Zur Lösung der Gleichung (12.9) wurde wieder das am Lehrstuhl für Angewandte Mathematik in Düsseldorf entwickelte Programm zur Lösung von Integralgleichungen verwendet. Das bedeutet, daß die bei jeder Iteration entstehenden linearen Integralgleichungen durch Gauß-Quadratur mit 32 Stützstellen diskret gelöst werden. Bei der für EV3 erforderlichen Schrittweitensteuerung werden demzufolge die zur Bildung von η nach (9.6) erforderlichen Größen durch entsprechende diskrete Größen ersetzt, die im Programmverlauf ermittelt werden können. Aus den diskreten Werten für die jeweiligen Iterierten erhält man in natürlicher Weise durch Übergang zum zugehörigen Interpolationspolynom wieder eine stetige Funktion. Der durch die Diskretisierung und Interpolation entstehende Fehler wird hier nicht näher untersucht, da dies nicht zum eigentlichen Thema dieser Arbeit gehört.



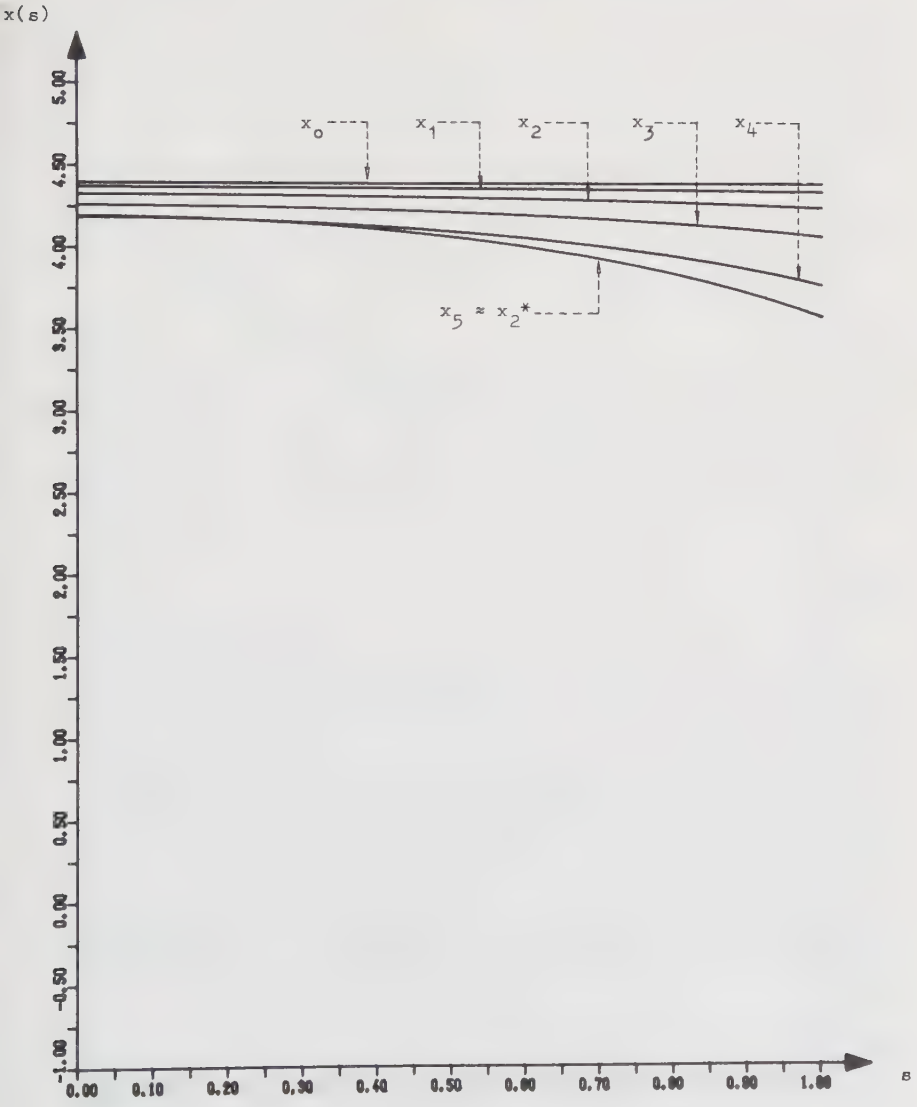
Figur XII.6: Lösung von Gleichung (12.9) durch das Newton-Verfahren mit $x_0 \equiv 1.7$



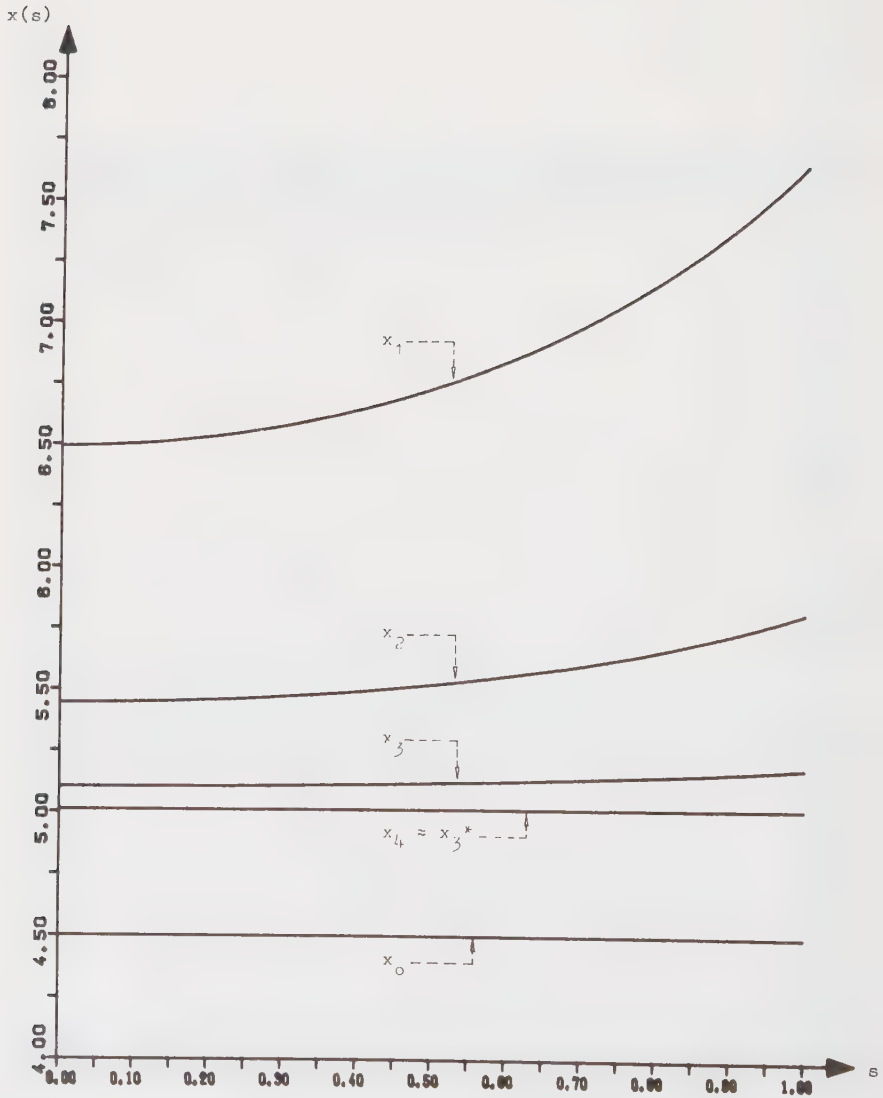
Figur XII.7: Lösung von Gleichung (12.9) durch EV3 mit $x_o \equiv 1.7$



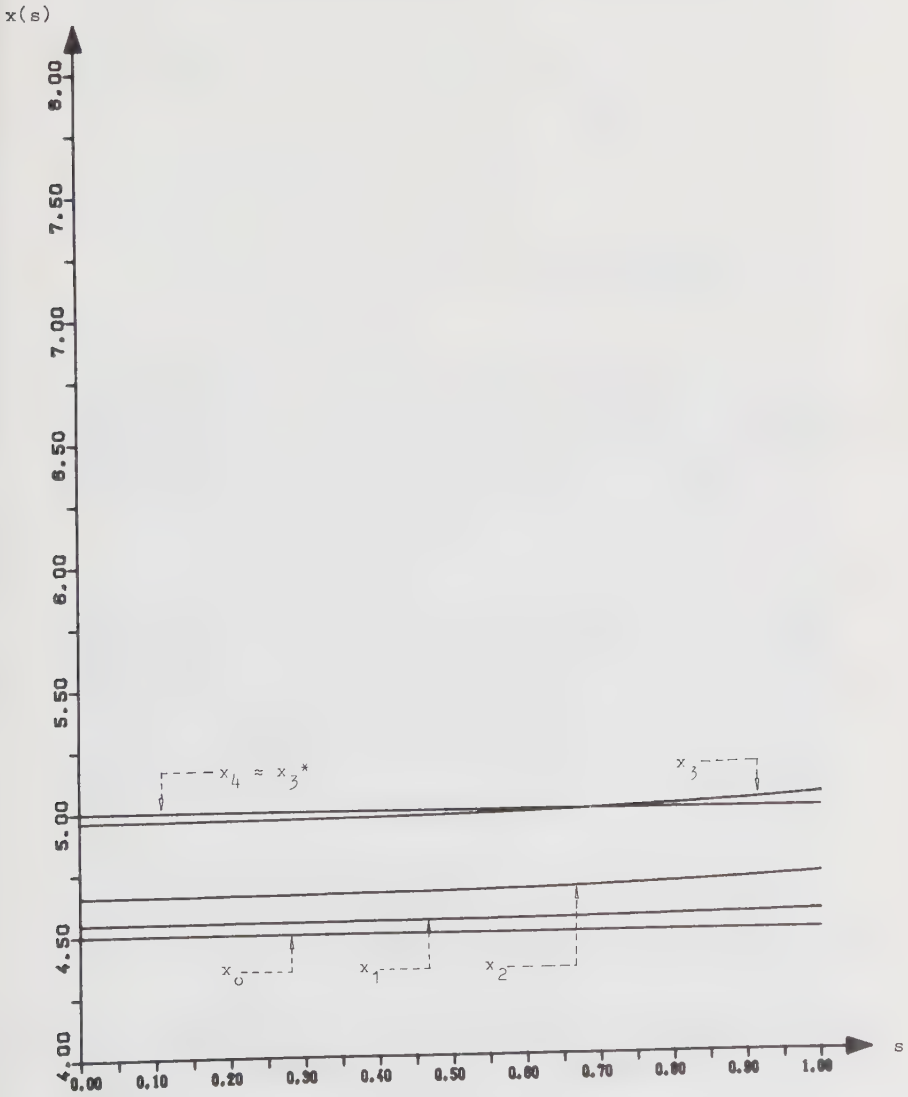
Figur XII.8: Lösung von Gleichung (12.9) durch das Newton-Verfahren mit $x_o \equiv 4.4$



Figur XII.9: Lösung von Gleichung (12.9) durch EV3 mit $x_0 \equiv 4.4$



Figur XII.10: Lösung von Gleichung (12.9) durch das Newton-Verfahren mit $x_0 \equiv 4.5$



Figur XII.11: Lösung von Gleichung (12.9) durch EV3 mit $x_o \equiv 4.5$

XII.3 Randwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen

XII.3.1

Gesucht sei für $\lambda^* \in \mathbb{R}_+^0$ eine Lösung $x^* \in C^2[0,1]$ des Randwertproblems

(12.10) $\quad \forall\, s \in [0,1]: \quad x''(s) + \lambda^* \exp(-\frac{1}{x(s)+1}) = 0 \quad$ mit

$$x(0) = x(1) = 0 \ .$$

Durch dieses Randwertproblem wird in vereinfachter und normierter Form die Selbstaufheizung von Stoffen bei chemischen Reaktionen beschrieben (stationäre Form der Arrhenius - Gleichung).

In transformierter Form wird das Randwertproblem bei SATTINGER in [46] unter (1.2.4) angeführt, und PARKS untersucht in [43] ebenfalls Randwertprobleme dieser Art. Man kann den genannten Arbeiten entnehmen, daß das Randwertproblem für gewisse Bereiche von λ^* mehrere Lösungen besitzt. Will man daher das Problem in irgend einer Form iterativ ausgehend von $x_o \equiv 0$ lösen, so sind für bestimmte λ^* eventuell Schwierigkeiten zu erwarten.

Als Lösungsverfahren bietet sich für (12.10) zunächst die Quasilinearisationsmethode an. Bei deren Anwendung stellt man fest, daß für große Werte von λ^* (z.B. für $\lambda^* = 50$) ausgehend von $x_o \equiv 0$ keine Konvergenz erreicht wird. Es empfiehlt sich somit, das Problem (12.10) einzubetten. Hierzu ist es naheliegend, den Faktor λ^* in (12.10) durch Multiplikation mit Werten $\lambda \in [0,1]$ von $\lambda\,\lambda^* = 0$ bis zu $\lambda\,\lambda^* = \lambda^*$ zu variieren.

Wenn x^* eine Lösung des Randwertproblems (12.10) ist, so gilt hierfür

$\forall\, s \in [0,1]: \quad x^{*\prime\prime}(s) = -\lambda^* \exp(-\frac{1}{x^*(s)+1}) \leq 0 \ .$

Wegen der Randbedingungen folgt daraus, daß

$\forall\, s \in [0,1]: \quad x^*(s) \geq 0 \ .$

Deshalb ist die Lösung des Randwertproblems (12.10) äquivalent zur Suche nach einer Lösung $x^* \in C[0,1]$ der Integralgleichung

(12.11) $\quad \forall\, s \in [0,1]:$

$$[F(x)](s) := x(s) - \lambda^* \int_0^1 G(s,t) \exp\left(-\frac{1}{|x(t)+1|}\right) dt = 0 \ ,$$

wobei entsprechend den Randbedingungen aus (12.10) die Greensche Funktion

$$(12.12)\quad \forall\, s,\, t \in [0,1]: \quad G(s,t) := \begin{cases} s\,(1-t) & \text{für } s \le t \\ t\,(1-s) & \text{für } t \le s \end{cases}$$

zu verwenden ist. Statt (12.10) einzubetten kann man daher alternativ auch die Einbettungsfunktion

$$(12.13)\quad \forall\, \lambda,\, s \in [0,1]:$$
$$H(x,\lambda)(s) := x(s) - \lambda\,\lambda^* \int_0^1 G(s,t)\,\exp\Big(-\frac{1}{|x(t)+1|}\Big)\,dt = 0$$

für die Integralgleichung (12.11) verwenden.

Bei Anwendung von EV1 auf (12.13) erhält man dabei eine Iterationsfolge, die identisch ist mit der Folge, die man erhält, wenn für das analog eingebettete Randwertproblem (12.10) entsprechend gedämpfte Quasilinearisationsschritte bei den zugehörigen λ - Werten durchgeführt werden.

Da die zur Bestimmung der Schrittweiten sowie der Dämpfungsparameter erforderlichen Größen für die Einbettung (12.13) der Integralgleichung (12.11) numerisch erheblich besser zugänglich sind, als die entsprechenden Größen bei Anwendung der Einbettung auf das Randwertproblem (12.10), empfiehlt es sich, zwecks Lösung von (12.10) EV1 auf (12.13) anzuwenden. Es sind dann die folgenden Fréchet-Ableitungen für die Ausführung relevant:

$$(12.14)\quad \forall\, x \in C[0,1],\ \forall\, \lambda,\, \sigma,\, s \in [0,1]:$$
$$[H_\lambda(x,\lambda)\,\sigma](s) = -\sigma\,\lambda^* \int_0^1 G(s,t)\,\exp\Big(-\frac{1}{|x(t)+1|}\Big)\,dt$$

$$(12.15)\quad \forall\, x,\, y \in C[0,1],\ \forall\, s \in [0,1]:$$
$$[H_x(x,\lambda)\,y](s) = y(s) - \lambda\,\lambda^* \int_0^1 G(s,t)\,u(t)\,y(t)\,dt$$
$$\text{mit}\quad u(t) := \operatorname{sign}(x(t)+1)\,\frac{1}{(x(t)+1)^2}\,\exp\Big(-\frac{1}{|x(t)+1|}\Big)$$

$$(12.16)\quad \forall\, x,\, y,\, z \in C[0,1],\ \forall\, s \in [0,1]:$$
$$[H_{xx}(x,\lambda)\,y\,z](s) = \lambda\,\lambda^* \int_0^1 G(s,t)\,v(t)\,y(t)\,z(t)\,dt$$

$$\text{mit} \quad v(t) := \frac{2\,|x(t)+1| - 1}{(x(t)+1)^4} \exp\left(-\frac{1}{|x(t)+1|}\right)$$

Bei $x(t) = -1$ sind dabei die Funktionen $\exp(-\frac{1}{|x(t)+1|})$, u und v stetig differenzierbar durch Null fortsetzbar.

Betrachtet man die Integralgleichung (12.11) auf dem Banachraum $(C[0,1], \|\ \|_\infty)$, so ergeben sich hieraus für jedes $\lambda \in [0,1]$ in natürlicher Weise die benötigten Größen für die Schrittweitensteuerung in EV1.

Für die numerische Ausführung von EV1 ist es unumgänglich, die Normen der in (12.14), (12.15) und (12.16) angegebenen Fréchet-Ableitungen und die jeweiligen durch Lösung impliziter linearer Integralgleichungen bestimmten Iterierten mit Hilfe der Anwendung geeigneter Quadraturformeln zu approximieren. Unter Verwendung der Gauß-Quadraturformel mit 32 Stützstellen bedeutet dies, daß statt der stetigen Iterierten, welche durch die Integralgleichungen festgelegt sind, nur diskrete Näherungen im Banachraum $(\mathbb{R}^{32}, \|\ \|_\infty)$ bestimmt werden. Dabei ergeben sich die diskreten Näherungen aus der Lösung der linearen Gleichungssysteme, die den linearen Integralgleichungen durch die Diskretisierung entsprechen. Die erzeugten diskreten Iterierten passen somit zu einem nichtlinearen diskreten Ausgangsgleichungssystem, das aus (12.11) entsteht, wenn man die Gleichung nur an den Gauß-Stützstellen auswertet und dabei das Integral durch die Gauß-Approximation ersetzt.

Für die diskrete Version von Gleichung (12.11) mit $\lambda^* = 50$ wurde EV1 unter Verwendung der zugehörigen Einbettungsfunktion (12.13) mit $x_0 \equiv 0$, $c = 1$, $q = 0.99$ und $\varrho = 0.9$ in der oben beschriebenen Weise ausgeführt. Dabei wurde die diskrete Lösung nach 10 Iterationen auf 16 Stellen genau approximiert. Unter Verwendung einer globalen Schranke für die Norm der zweiten Ableitung läßt sich die erzielte Approximationsgenauigkeit mit Hilfe von Satz IV.20 a-posteriori auch nachweisen. In Figur XII.12 ist der Verlauf der Iterierten von EV1 skizziert, und es sind für jeden Schritt die Steuerparameter λ_i und μ_i angegeben. Die gezeigten stetigen Iterationsfunktionen entstanden dabei aus den diskreten Iterierten in naheliegender Weise durch Polynominterpolation unter Verwendung der bei der Gauß-Quadratur benötigten Legendre-Polynome. Wie auch bei den anderen Einbettungsbeispielen wird der Fehler, der durch Übergang von der stetigen Gleichung (12.13)

zur diskreten Iteration in EV1 sowie durch anschließende Interpolation der berechneten diskreten Näherungen entsteht, hier nicht eingehend untersucht. Unter Verwendung der bekannten Fehlerabschätzungen zur Gauß-Quadratur und zur Polynominterpolation ließe er sich unter entsprechenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an die stetigen Iterierten ohnehin nur unter der Annahme entsprechender Schranken für die Ableitungen der (nicht bekannten) stetigen Iterationsfunktionen in den Griff bekommen, so daß eine praktisch realisierbare Aussage über den tatsächlich vorhandenen Fehler nicht erwartet werden kann.

In Abwandlung des Randwertproblems (12.10) wurde außerdem die gleiche Differentialgleichung mit wie folgt geänderten Randbedingungen untersucht:

$$(12.17) \quad \forall\, s \in [0,1]: \quad x''(s) + \lambda^* \exp\left(-\frac{1}{x(s)+1}\right) = 0 \quad \text{mit}$$

$$x'(0) = x(1) = 0 \,.$$

Das so geänderte Randwertproblem läßt sich in gleicher Weise wie (12.10) lösen, wobei lediglich statt (12.12) die den anderen Randbedingungen entsprechende Greensche Funktion

$$(12.18) \quad \forall\, s, t \in [0,1]: \quad G(s,t) := \begin{cases} -(1-t) & \text{für } s \leq t \\ -(1-s) & \text{für } t \leq s \end{cases}$$

herangezogen werden muß.

Auch hier erzielt man mit Anwendung des Quasilinearisationsverfahrens auf die Ausgangsgleichung für große Werte von λ^* ausgehend von $x_o \equiv 0$ keine Konvergenz, so daß sich die Ausführung von EV1 mit der Einbettungsfunktion (12.13) anbietet.

Unter Verwendung von $c = 1$, $q = 0.99$ und $\varrho = 0.9$ konvergieren die für $\lambda^* = 20$ durch EV1 erzeugten (diskreten) Iterierten in 13 Schritten zu einer bis auf 16 Stellen approximierten Lösung des diskretisierten Randwertproblems. In Figur XII.13 ist der Iterationsverlauf von EV1 durch Angabe der Steuerparameter λ_i und μ_i sowie Skizzierung der durch Interpolation aus den diskreten Iterierten gewonnenen Näherungen veranschaulicht.

Verfahrensparameter:

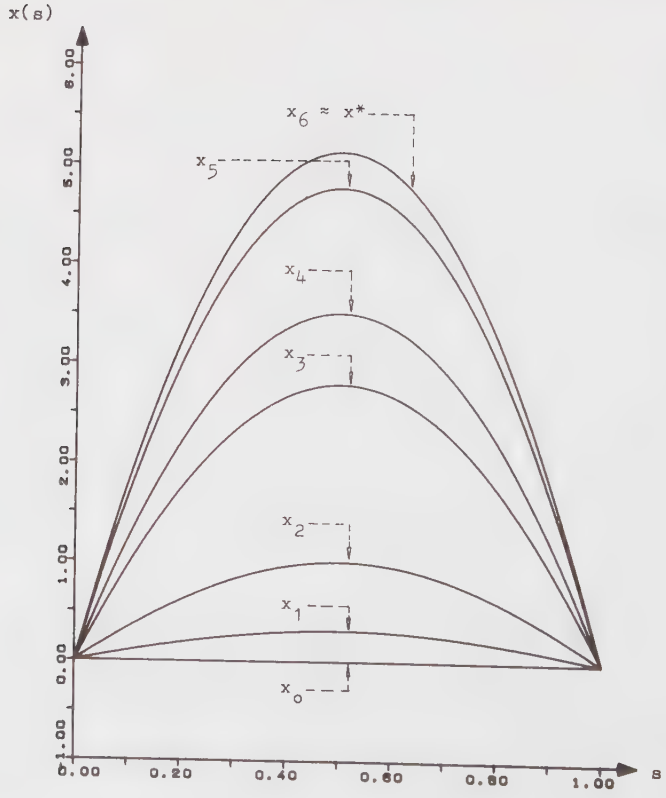
$\lambda^* = 50$

$c = 1.0$

$q = 0.99$

$\rho = 0.9$

i	μ_i	λ_i	$\lambda_i \lambda^*$
0	0.0565	0.4352	21.76
1	0.2213	0.4664	23.32
2	0.9054	0.5574	27.87
3	1.0	0.7254	36.27
4	1.0	0.9296	46.48
5 - 10	1.0	1.0	50.0



Figur XII.12: Lösung von Gleichung (12.11) für $\lambda^* = 50$ unter Anwendung von EV1 und Einbettung (12.13)

Verfahrensparameter:

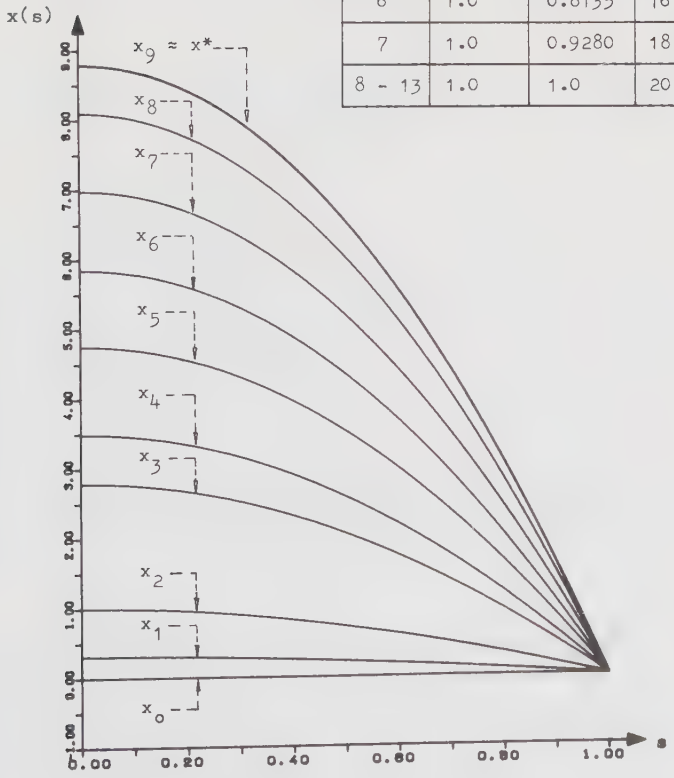
$\lambda^* = 20$

$c = 1.0$

$q = 0.99$

$\varrho = 0.9$

i	μ_i	λ_i	$\lambda_i \lambda^*$
0	0.0575	0.2718	5.437
1	0.2235	0.2916	5.831
2	0.9099	0.3488	6.976
3	1.0	0.4531	9.061
4	1.0	0.5805	11.61
5	1.0	0.6975	13.95
6	1.0	0.8135	16.27
7	1.0	0.9280	18.56
8 - 13	1.0	1.0	20.0



Figur XII.13: Lösung von Gleichung (12.17) für $\lambda^* = 20$ unter Anwendung von EV1 und Einbettung (12.13)

XII.3.2

Gesucht sei für $\lambda^* \in \mathbb{R}_+^o$ eine Lösung $x^* \in C^2[0,1]$ des Randwertproblems

$$(12.19) \quad \forall\, s \in [0,1]: \quad x''(s) + \lambda^* (1 - x(s)) \exp\left(\frac{x(s)}{1+0.05\, x(s)}\right) = 0$$

$$\text{mit} \quad x(0) = x(1) = 0 \,.$$

Für $\lambda^* = 4$ wird dieses Randwertproblem in [33] von KUBIČEK - HLAVÁČEK als Beispiel 5 untersucht. Dabei werden auf der Basis der Differentialgleichungsmethode mit Hilfe von mehrfach zu durchlaufenden Einbettungszyklen Approximationen für eine Lösung berechnet und sukzessive verbessert.

Das Randwertproblem entsteht unter vereinfachenden Annahmen bei der Beschreibung der Energie- und Massenerhaltungssätze in einer ebenen Platte unter einer exothermischen Reaktion.

Für eine Lösung x^* von (12.19) gilt wegen der Randbedingungen $x^{*\prime\prime}(0) = x^{*\prime\prime}(1) = -\lambda^*$, so daß die Lösung für positives λ^* an den Rändern negativ gekrümmt sein muß. Nach (12.19) kann eine Änderung des Krümmungsverhaltens (Wendepunkt) auf dem Intervall $[0,1]$ nur eintreten, wenn $x^*(t_o) = 1$ für ein $t_o \in (0,1)$. Dann folgt aber $x^{*\prime\prime}(t) \geq 0$ für $t \geq t_o$ und damit $x^*(t) \geq 1$ auf $[t_o,1]$, was im Widerspruch zu $x^*(1) = 0$ steht. Also muß x^* auf ganz $[0,1]$ negativ gekrümmt sein mit $\forall\, t \in [0,1]: \quad 0 \leq x^*(t) < 1$.

Analog zu Beispiel XII.3.1 ist daher die Lösung des Randwertproblems (12.19) äquivalent zur Bestimmung einer Lösung $x^* \in C[0,1]$ der Integralgleichung

$$(12.20) \quad \forall\, s \in [0,1]:$$

$$[F(x)](s) = x(s) - \lambda^* \int_o^1 G(s,t)\, (1-x(t)) \exp\left(\frac{x(t)}{1+0.05\, x(t)}\right) dt = 0$$

mit der Greenschen Funktion (12.12).

Folglich kann man zur Lösung von (12.19) auch hier EV1 auf die wie folgt eingebettete Integralgleichung (12.20) anwenden:

$$(12.21) \quad \forall\, \lambda, s \in [0,1]:$$

$$[H(x,\lambda)](s) := x(s) - \lambda \lambda^* \int_o^1 G(s,t)\, f(t)\, dt = 0$$

$$\text{mit}\quad f(t) := (1-x(t))\,\exp\Big(\frac{x(t)}{|1+0.05\,x(t)|}\Big)$$

In die Schrittweitensteuerung für EV1 gehen dann die folgenden Fréchet-Ableitungen ein:

(12.22) $\forall\, x \in C[0,1]\quad \forall\, \lambda,\ \sigma,\ s \in [0,1]$:

$$[H_\lambda(x,\lambda)\,\sigma](s) = -\,\sigma\,\lambda^* \int_0^1 G(s,t)\,(1-x(t))\,\exp\Big(\frac{x(t)}{|1+0.05\,x(t)|}\Big)\,dt$$

(12.23) $\forall\, x,\ y \in C[0,1]\quad \forall\, s \in [0,1]$:

$$[H_x(x,\lambda)\,y](s) = y(s) - \lambda\,\lambda^* \int_0^1 G(s,t)\,g(t)\,y(t)\,dt$$

$$\text{mit}\quad g(t) := \Big[\frac{(1-x(t))\,\operatorname{sign}(1+0.05x(t))}{(1+0.05x(t))^2} - 1\Big]\exp\Big(\frac{x(t)}{|1+0.05x(t)|}\Big).$$

(12.24) $\forall\, x,\ y,\ z \in C[0,1]\quad \forall\, s \in [0,1]$:

$$[H_{xx}(x,\lambda)\,y\,z](s) = \lambda\,\lambda^* \int_0^1 G(s,t)\,h(t)\,y(t)\,z(t)\,dt \quad \text{mit}$$

$$h(t) := \frac{-\operatorname{sign}(u(t))\big[2u(t)^2+(1-x(t))(0.1u(t)-\operatorname{sign}(u(t))\big]}{u(t)^4}\,\exp\Big(\frac{x(t)}{u(t)}\Big)$$

$$\text{und}\quad u(t) := 1 + 0.05\,x(t)\ .$$

Die Funktionen f, g und h sind bei $x(t) = -20$ stetig differenzierbar durch Null fortsetzbar.

Durch Gauß-Quadratur mit 32 Stützstellen wird das Problem (12.20) für die numerische Ausführung von EV1 analog zu Beispiel XII.3.1 von $(C[0,1],\|\ \|_\infty)$ in den Banachraum $(\mathbb{R}^{32},\|\ \|_\infty)$ verlagert, und die Ableitungen (12.22), (12.23) und (12.24) werden durch entsprechende diskrete Größen ersetzt.

Figur XII.14 zeigt die interpolierten Ergebnisse sowie die Verfahrensparameter von EV1 für $\lambda^* = 4$, $c = 1.0$, $\rho = 0.9$ und $q = 0.99$. Die diskrete Lösung ist nach 6 Iterationen bis auf 16 Stellen genau approximiert. Zeichengenauigkeit ist schon nach 2 Iterationen erreicht.

Naturgemäß sind für größere Werte von λ^* mehr Iterationen erforderlich. Wie Figur XII.15 zu entnehmen ist, wird mit EV1 für $\lambda^* = 50$ die Lösung durch die sechste Iterierte mit Zeichengenauigkeit approximiert. Hier sind 10 Iterationen erforderlich, um eine Approximation mit 16 Stellen Genauigkeit zu erreichen.

Verfahrensparameter:

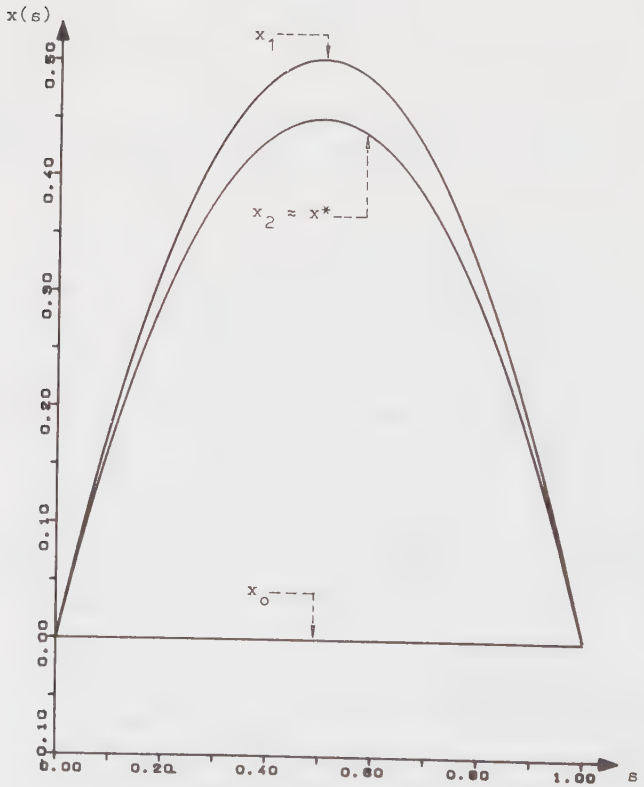
$\lambda^* = 4.0$

$c = 1.0$

$q = 0.99$

$\varphi = 0.9$

i	μ_i	λ_i	$\lambda_i \lambda^*$
0	1.0	0.5	2.0
1	1.0	1.0	4.0
2 - 6	1.0	1.0	4.0



Figur XII.14: Lösung von Gleichung (12.20) für $\lambda^* = 4$ unter Verwendung von EV1 und Einbettung (12.21)

Verfahrensparameter:

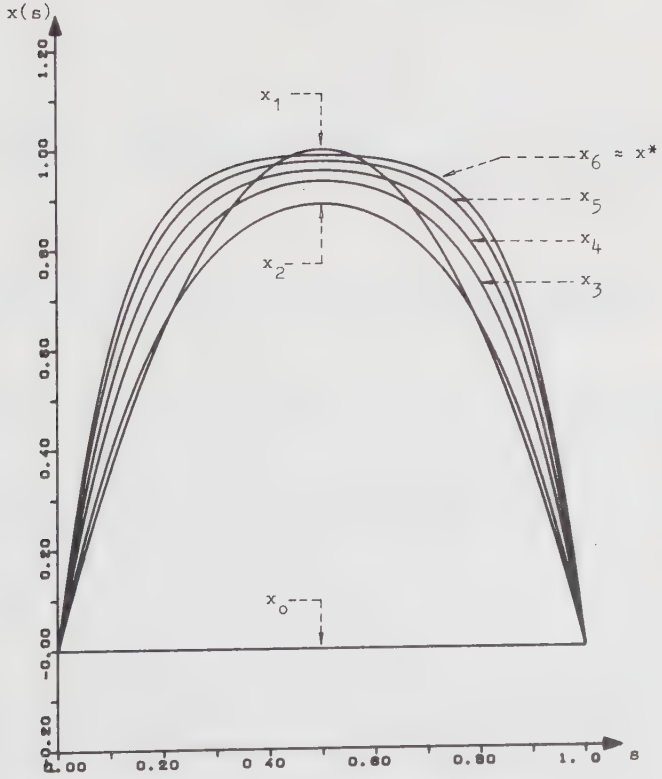
$\lambda^* = 50$

$c = 1.0$

$q = 0.99$

$\rho = 0.9$

i	μ_i	λ_i	$\lambda_i \lambda^*$
0	1.0	0.1601	8.01
1	1.0	0.3202	16.01
2	0.5004	0.6806	34.03
3	0.3943	0.9530	47.65
4	0.5772	1.0	50.0
5 - 10	1.0	1.0	50.0



Figur XII.15: Lösung von Gleichung (12.20) für $\lambda^* = 50$ unter Anwendung von EV1 und Einbettung (12.21)

XIII. LITERATURVERZEICHNIS

[1] ABRAMOWITZ, M. and I. A. STEGUN: Handbook of mathematical functions. Dover Publications Inc., New York 1964

[2] ALBRECHT, J.: Bemerkungen zum Iterationsverfahren von Schulz zur Matrixinversion. Z. Angew. Math. Mech. 41 (1961) 262 - 263

[3] ALEXANDER, J. C. and J. A. YORKE: The homotopy continuation method: numerically implementable topological procedures. Trans. Amer. Math. Soc. 242 (1978) 271 - 284

[4] AVILA, H. J. Jr.: The feasibility of continuation methods for nonlinear equations. SIAM J. Numer. Anal. 11 (1974) 102 - 122

[5] BELLMAN, R. E. and R. E. KALABA: Quasilinearization and nonlinear boundary - value problems. American Elsevier Publishing Company Inc., New York 1965

[6] BOGGS, P. T.: The solution of nonlinear systems of equations by A - stable integration techniques. SIAM J. Numer. Anal. 8 (1971) 767 - 785

[7] BROYDEN, C. G.: A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations. Math. Comp. 19 (1965) 577 - 583

[8] CHOW, S. N., J. MALLET - PARET and J. A. YORKE: Finding zeroes of maps: homotopy methods that are constructive with propability one. Mathematics of Computation 32 No. 143 (1978) 887 - 899

[9] COLLATZ, L.: Funktionalanalysis und numerische Mathematik. Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, New - York 1968

[10] DAVIDENKO, D.: On a new method of numerically integrating a system of nonlinear equations. Dokl. Akad. Nauk. SSSR 88 (1953) 601 - 604

[11] DEN HEIJER, C.: The numerical solution of nonlinear operator equations by imbedding methods. Mathematical Centre Tracts 107, Mathematisch Centrum, Amsterdam 1979

[12] DEUFLHARD, P.: A stepsize control for continuation methods and its special application to multiple shooting techniques. Numer. Math. 33 (1979) 115 - 146

[13] DEUFLHARD, P., H. J. PESCH and P. RENTROP: A modified continuation method for the numerical solution of nonlinear two - point boundary value problems by shooting techniques. Numer. Math. 26 (1976) 327 - 343

[14] DEUFLHARD, P.: A relaxation strategy for the modified Newton method. in BULIRSCH, R. W. OETTLI and J. STOER (eds): Optimisation and optimal control. Lecture notes in mathematics, vol. 477, Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, New - York (1975) 59 - 73

[15] DEUFLHARD, P.: A modified Newton method for the solution of ill - conditioned systems of nonlinear equations with application to multiple shooting. Numer. Math. 22 (1974) 289 - 315

[16] DIEUDONNÉ, J.: Grundzüge der modernen Analysis. Band 1, Vieweg - Verlag, Braunschweig 1975

[17] DÖRING, B.: Über das Newtonsche Näherungsverfahren. Math. Phys. Semesterberichte 16 (1969) 27 - 40

[18] EAVES, B. C.: Homotopies for the continuation of fixed points. Math. Programming 3 (1972) 1 - 22

[19] FEILMEIER, M., P. LORY, H. TH. SCHEURING and H. WACKER: Zwischenbericht über das Forschungsvorhaben Fe 125/1, Einbettung. Institut für angewandte Mathematik, München 1973

[20] FICKEN, F.: The continuation method for functional equations. Comm. Pure Appl. Math. 4 (1951) 435 - 456

[21] FREUDENSTEIN, F. and B. ROTH: Numerical solution of systems of nonlinear equations. J. Assoc. Comput. Mach. 10 (1963) 550 - 556

[22] GARCIA, C. B. and W. I. ZANGWILL: Global continuation methods for finding all solutions to polynomial systems of equations in n variables. in: Extremal methods and systems analysis, edited by A. V. FIACCO and K. O. KORTANEK, Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems, vol. 174, Springer - Verlag, Berlin (1980) 481 - 497

[23] GRAGG, W. B. and R. A. TAPIA: Optimal error bounds for the Newton - Kantorowitsch - theorem. SIAM J. Numer. Anal. 11 (1974) 10 - 13

[24] GOLDSTEIN, A.: Constructive real analysis. Harper and Row, New - York, Evanston and London 1967

[25] GRIFKA, D.: Adaptive Schrittweitenbestimmung bei der Stetigkeitsmethode. Diplomarbeit, Universität Düsseldorf 1977

[26] KANTOROWITSCH, L. W. und G. P. AKILOW: Funktionalanalysis in normierten Räumen. Akademie - Verlag, Berlin 1964

[27] KELLOG, R. B., T. Y. LI and J. A. YORKE: A method of continuation for calculating a Brouwer fixed point. in: Fixed points, algorithms and applications (S. KARAMARDIAN, ed.). Academic Press, New - York 1977

[28] KELLER, H. B.: Numerical methods for two - point boundary value problems. Blaisdell, Waltham Mass. 1968

[29] KELLER, H. B.: Global homotopies and Newton - methods. in: Recent advances in numerical analysis, Proc. Sympos. Math. Res. Center, Univ. Visc., Madison, Visc. (1978) 73 - 94

[30] KLEINMICHEL, H.: Stetige Analoga und Iterationsverfahren für nichtlineare Gleichungen in Banachräumen. Math. Nachr. 37 (1968) 313 - 344

[31] KOJIMA, M.: On the homotopic approach to systems of equations with separable mappings. Mathematical Programming Study 7 (1978) 170 - 184

[32] KRASNOSELSKII, M. A.: Approximate solution of operator equations. Wolters - Noordhoff Publishing, Groningen 1972

[33] KUBIČEK, M. and V. HLAVAČEK: Imbedding techniques for the solution of nonlinear boundary - value problems. Appl. Math. Comput. 4 (1978) 317 - 357

[34] LAHAYE, E.: Solution of systems of transcendental equations. Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. 5 (1948) 805 - 822

[35] LEDER, D.: Automatische Schrittweitensteuerung bei global konvergenten Einbettungsmethoden. ZAMM 54 (1974) 319 - 324

[36] LINDFIELD, G. R. and D. C. SIMPSON: Modifications of the continuation method for the solution of systems of nonlinear equations. Internat. J. Math. and Math. Sci. 2 (1979) 299 - 308

[37] LJUSTERNIK, L. A. und W. I. SOBOLEW: Elemente der Funktionalanalysis. Akademie - Verlag, Berlin 1968

[38] MENZEL, R. und H. SCHWETLICK: Über einen Ordnungsbegriff bei Einbettungsalgorithmen zur Lösung nichtlinearer Gleichungen. Computing 16 (1976) 187 - 199

[39] MENZEL, R. und H. SCHWETLICK: Zur Lösung parameterabhängiger nichtlinearer Gleichungen mit singulären Jacobi - Matrizen. Numer. Math. 30 (1978) 65 - 79

[40] MEYER, G. H.: On solving nonlinear equations with a one - parameter operator imbedding. SIAM J. Numer. Anal. 5 (1968) 739 - 752

[41] MÖRBEL, F.: Iterationsverfahren höherer Ordnung in Banach-Räumen mit Anwendung auf Randwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Dissertation, Universität Düsseldorf 1973

[42] ORTEGA, J. M. and W. C. RHEINBOLDT: Iterative solution of nonlinear equations in several variables. Academic Press, New - York 1970

[43] PARKS, J. R.: Criticality criteria for various configurations of a self - heating chemical as functions of activation energy and temperature of assembly. Journal of Chemical Physics, 34 No. 1 (1961) 46 - 50

[44] PETRY, W.: Eine Verallgemeinerung des Newtonschen Iterationsverfahrens. Computing 7 (1971) 25 - 45

[45] RHEINBOLDT, W. C.: An adaptive continuation process for solving systems of nonlinear equations. Computer Science Techn. Rep. TR - 393, University of Maryland 1975

[46] SATTINGER, D. H.: Topics in stability and bifurcation theory. Lecture notes in mathematics, vol. 309, Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, New - York 1973

[47] SCHWARTZ, J. T.: Nonlinear functional analysis. Gordon and Breach, New - York, London, Paris 1969

[48] SCHWETLICK, H.: Ein neues Prinzip zur Konstruktion implementierbarer global konvergenter Einbettungsalgorithmen. Beitr. Num. Math. 4 (1975) 215 - 228

[49] SCHWETLICK, H.: Ein neues Prinzip zur Konstruktion implementierbarer global konvergenter Einbettungsalgorithmen (Beispiele) Beitr. Num. Math. 5 (1976) 201 - 206

[50] SCHWETLICK, H.: Über die Realisierung und Konvergenz von Mehrschrittverfahren zur iterativen Lösung nichtlinearer Gleichungen. ZAMM 54 (1974) 479 - 493

[51] STOER, J.: Einführung in die Numerische Mathematik I. Heidelberger Taschenbücher, Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, New - York 1976

[52] WACKER, H. J.: Ein Iterationsverfahren zur Lösung spezieller nichtlinearer Randwertprobleme. Computing 9 (1972) 275 - 291

[53] WASSERSTROM, E. and A. KIRSZENBLAT: Analog solutions of nonlinear boundary value problems by the continuation method. IEEE Transactions on Computers, Vol. C-22, No. 11 (1973) 966 - 970

Herrn Professor Dr. B. Döring danke ich für die Themenstellung sowie für die Betreuung dieser Arbeit. Er stand mir mit zahlreichen Anregungen und Hinweisen zur Seite.

Herrn Professor Dr. W. Petry danke ich für die Übernahme des Koreferats.

Den Herren Dr. H. Lütcke, Dr. R. Voller und Dr. P. W. Meyer danke ich für hilfreiche Diskussionen.

Den Herren A. Görke, A. Klosson und A. Raffelsieper danke ich für die Unterstützung bei der Durchführung der Programmierarbeiten zur Behandlung der Beispiele.

L e b e n s l a u f

22.10.1945	geboren in Meschede
1.4.1952 - Mai 1953	Katholische Marienschule in Meschede
Mai 1953 - 31.3.1956	Katholische Volksschule am Paulusplatz in Düsseldorf
1.4.1956 - 31.3.1962	Städtische Realschule in Ratingen
31.3.1962	Abschluß der Realschule mit dem Zeugnis der mittleren Reife
1.4.1962 - 31.3.1965	Lehre als Bankkaufmann bei der Amts- und Stadtsparkasse in Ratingen
31.3.1965	Lehrabschlußprüfung als Bankkaufmann
1.5.1965 - 13.10.1967	Wilhelm-Heinrich-Riehl-Kolleg in Düsseldorf (Institut zur Erlangung der Hochschulreife für Berufstätige mit abgeschlossener Ausbildung)
13.10.1967	Reifeprüfung
15.10.1967 - 18.12.1974	Studium der Mathematik an der Universität zu Köln
18.12.1974	Diplom - Hauptprüfung für Studierende der Mathematik
19.12.1974 - 31.3.1981	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Angewandte Mathematik an der Universität Düsseldorf
1.4.1981 - 31.8.1981	arbeitslos
1.9.1981 - heute	Angestellter bei der KARRENA GmbH in Düsseldorf

Seit dem 20.9.1974 bin ich verheiratet mit Ute Teusner, geb. Baldauf. Wir haben seit dem 11.10.1977 eine Tochter.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit befaßt sich mit der iterativen Bestimmung von Nullstellen für Operatoren in Banachräumen. Das Ausgangsproblem wird mit Hilfe eines Einbettungsparameters und des Startvektors zu einer Problemklasse erweitert, die man Einbettungsfamilie nennt. Zur Problemlösung werden für bestimmte Elemente der Einbettungsfamilie gedämpfte Newton-ähnliche Iterationsschritte für geeignete Werte des Einbettungsparameters durchgeführt. Die Wahl der Verfahrensparameter wird unter dem Gesichtspunkt einer möglichst großen Normreduktion vorgenommen. Zur Bestimmung der Parameter werden ausschließlich lokale Informationen der entsprechenden Einbettungsfunktion verwendet. Dadurch wird die Durchführung der Iterationen erleichtert.

Für den allgemeinen Fall werden alternativ zwei verschiedene Einbettungsverfahren EV1 und EV2 angegeben. EV1 ist numerisch einfacher durchzuführen als EV2, hat dafür aber schärfere Ausführbarkeitsvoraussetzungen. Es werden Aussagen sowohl über die Existenz von Lösungen für Einbettungsfunktionen wie auch über die Ausführbarkeit der Verfahren gemacht. Die Voraussetzungen dieser Sätze sind wegen der bei der Iteration erzielten Normreduktion auf zugehörigen Niveaumengen gefordert.

Bei Verwendung bestimmter Einbettungsfamilien und geeigneter Wahl der Verfahrensparameter ergeben sich als Sonderfall des Verfahrens EV1 gedämpfte Newton-ähnliche Verfahren EV3 bzw. EV4 für den Ausgangsoperator. Bei EV3 ergeben sich Ausführbarkeitsvoraussetzungen auf einer Niveaumenge, während sich die Voraussetzungen bei EV4 auf einer Kugel um den Startwert angeben lassen.

Sämtliche Existenz- und Ausführbarkeitssätze für die angegebenen Einbettungen bzw. Einbettungsfamilien und die zugehörigen Verfahren wurden mit dem Ziel möglichst allgemeiner Anwendbarkeit und möglichst schwacher Voraussetzungen hergeleitet. Dabei wurden vergleichbare Aussagen für ähnliche Verfahren aus der Literatur an etlichen Stellen verbessert. Gleichzeitig erweisen sich die angeführten Verfahren wegen der numerisch weniger aufwendigen Durchführung vergleichbaren Verfahren anderer Autoren als überlegen.

Die Eignung der angeführten Einbettungsverfahren wird anhand verschiedener Beispiele aus den Bereichen nichtlinearer Gleichungssysteme, nichtlinearer Integralgleichungen sowie Randwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen nachgewiesen.